ひかり統計塾

統計検定２級
公式問題集(CBT対応版)の解説
カテゴリー8 (p106-125)

検定の分野

統計検定2級　CBT問題集　PART.2 目次

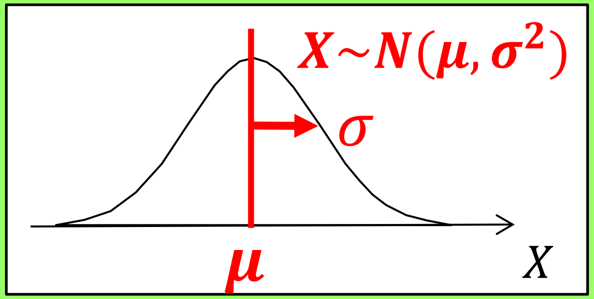
[C8]
[CATEGORY.8]
検定の分野

(p106.1)[C8]問1. 母平均の検定の考え方

(Aランク)

ある金融資産の日次収益率(%)

母集団



抽出

標本

$X_1, X_2, \dots, X_n$ $(n = 21)$
⇒標本平均$\bar{X}$
(不偏分散$V = \widehat{\sigma^2}$)

例						
0.16	0.03	-0.49	0.47	0.43	-0.42	0.49
-0.29	0.29	0.50	0.29	-0.31	0.50	0.14
0.69	-0.19	0.35	-0.19	0.37	-0.06	-0.03

⇒ $\boldsymbol{\mu = 0}$ と言える？

公式

$X_i \sim \boxed{N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})}$ **の時、**

標本平均 $\bar{X} \sim \boxed{N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}}\right)}$

$(X_1, X_2, \dots, X_n$の平均$)$

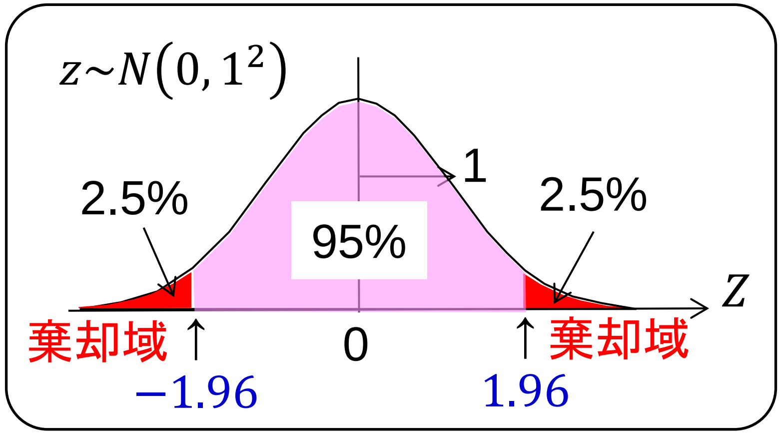
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

(公式)$X \sim N(\mu, \sigma^2)$の時、
$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$と変換すると、
$Z \sim N(0,1)$となる

帰無仮説H_0: $\mu = \mu_0$ $(\mu_0 = 0)$
対立仮説H_1: $\mu \neq \mu_0$ (両側検定)

H_0が正しいと仮定する
また、問題では、n=21なので、

⇒検定統計量: $Z = \frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{21}}}$



(ア) 棄却域は、$|Z| > 1.96$

(p106.2)[C8]問1. 母平均の検定の考え方

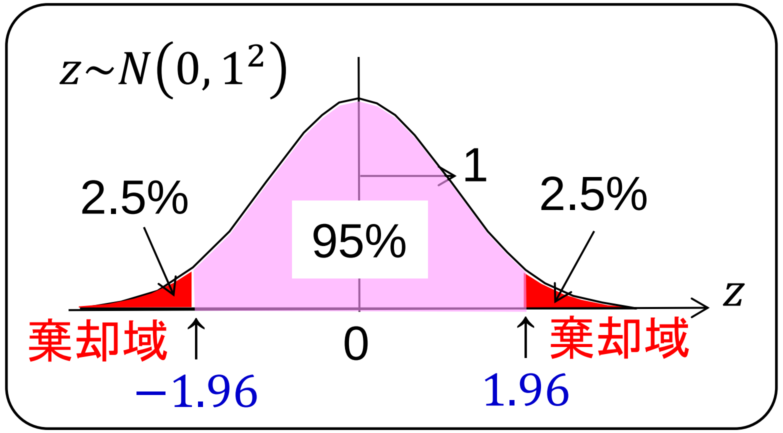
(Aランク)

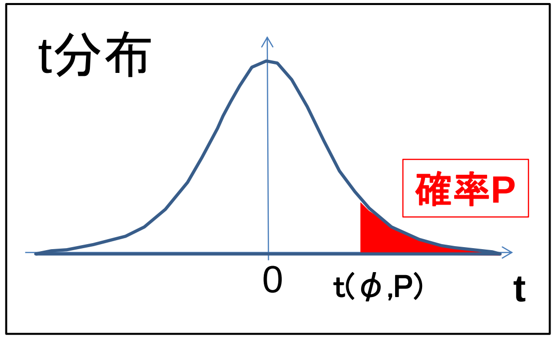
母分散σ^2が既知の時

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

済

検定統計量: $Z=\dfrac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{21}}}$





片側P=	0.250	0.200	0.05	0.025	0.01
(両側2P=)	0.500	0.400	0.10	0.05	0.02
φ= 1	1.000	1.376	6.314	12.706	31.821
2	0.816	1.061	2.920	4.303	6.965
3	0.765	0.978	2.353	3.182	4.541
4	0.741	0.941	2.132	2.776	3.747
5	0.727	0.920	2.015	2.571	3.365
6	0.718	0.906	1.943	2.447	3.143
7	0.711	0.896	1.895	2.365	2.998
8	0.706	0.889	1.860	2.306	2.896
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	0.688	0.862	1.734	2.101	2.552
19	0.688	0.861	1.729	2.093	2.539
20	0.687	0.860	1.725	2.086	2.528
30	0.683	0.854	1.697	2.042	2.457
40	0.681	0.851	1.684	2.021	2.423

母分散σ^2が未知の時

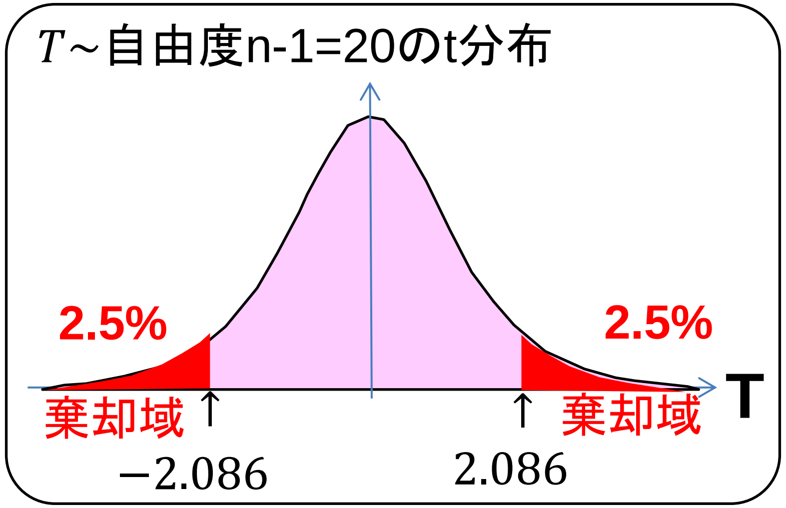
不偏分散: $\widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}\sim\text{自由度n-1のt分布}$$

n=21なのでn-1=20

(帰無)仮説: $\mu=\mu_0\ \ (\mu_0=0)$
が正しいと仮定する

検定統計量: $T=\dfrac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{21}}}$



(イ) $|T|>2.086$

(p106.3)[C8]問1. 母平均の検定の考え方

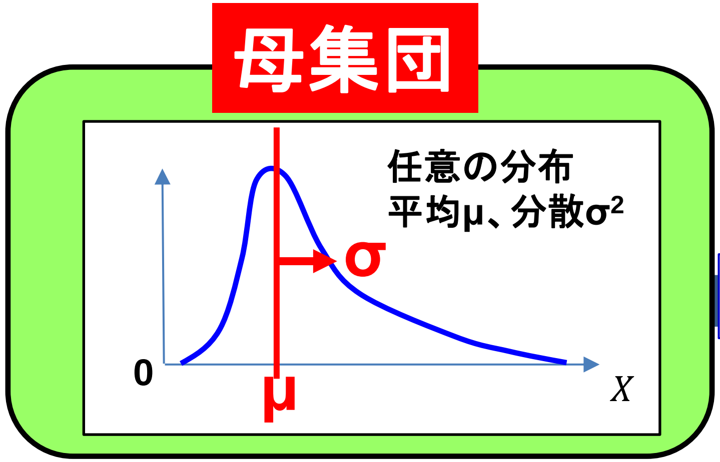
(Aランク)

これまで、X_iは正規分布に従うと仮定していた

p102.問5の解説を参照してください

X_iが正規分布に従わない場合は・・・

⇒中心極限定理を使います



抽出

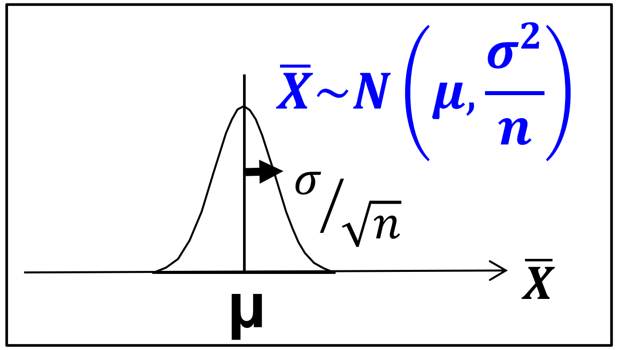
標本

$X_1, X_2, \dots, X_n$

⇒標本平均$\bar{X}$

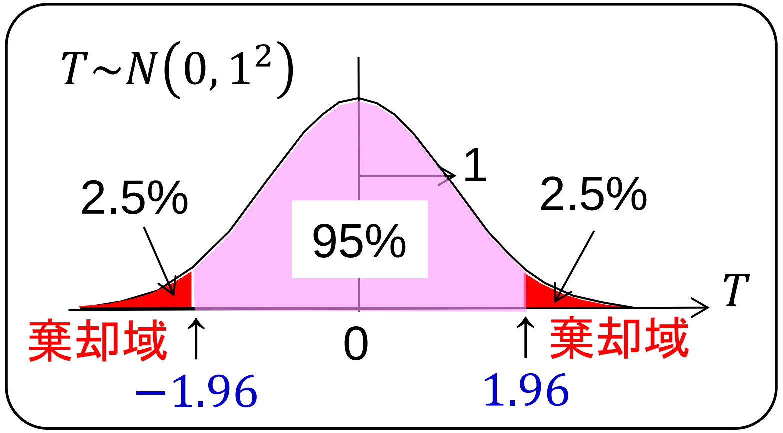
⇒不偏分散$\widehat{\sigma^2}$

nが十分に大きい時、
$\bar{X}$は近似的に正規分布に従う



$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}/n}} \sim N(0,1)$$



(ウ) $|T| > 1.96$

⇒(ア) $|Z| > 1.96$, (イ)$|T| > 2.086$、

(ウ) $|T| > 1.96$ (答)①

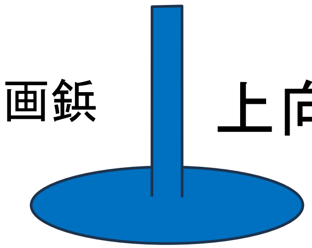
済

(p108.1)[C8]問2. 第1種の過誤・確率

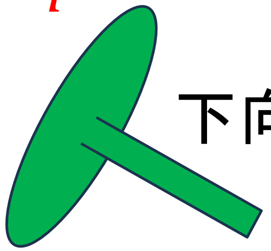
(Bランク)

帰無仮説H_0

確率: $p = 0.62$

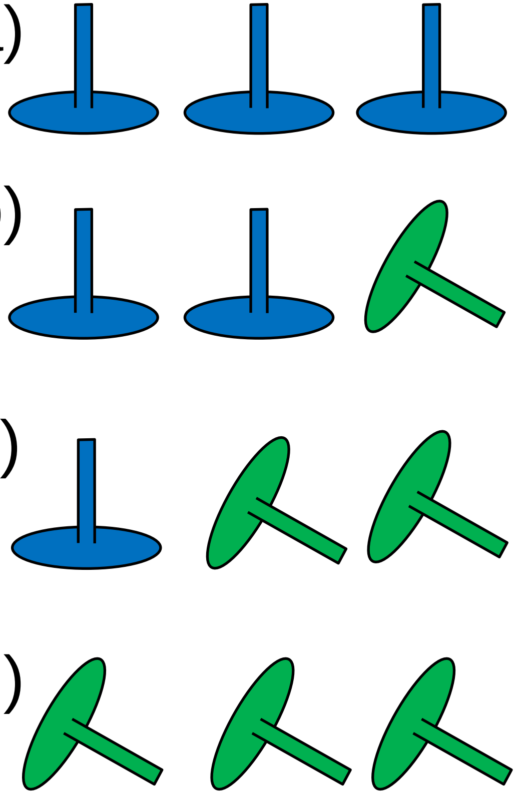


確率: $1 - p = 0.38$



画鋲を3回投げる

(a) (b) (c) (d)

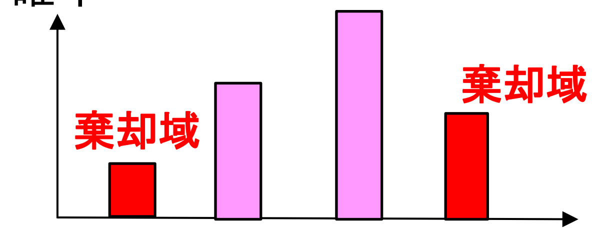


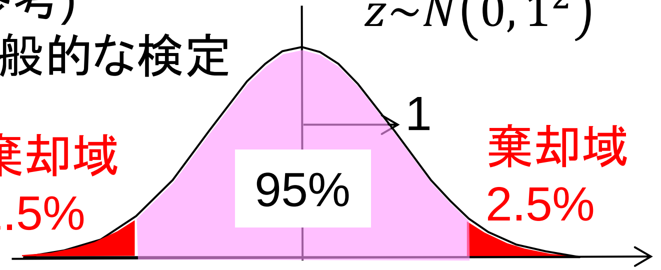
問題によると

(a) H_0: 棄却する

(b), (c) H_0: 棄却しない

(d) H_0: 棄却する





「第１種の過誤（誤り）」
=帰無仮説が正しいのに
棄却されてしまう誤り

問題：第１種の誤りと、その誤りを犯す確率は?

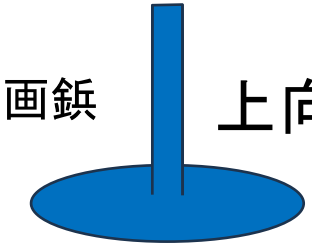
(p108.2)[C8]問2. 第1種の過誤・確率

(Bランク)

帰無仮説H_0

確率: $p = 0.62$

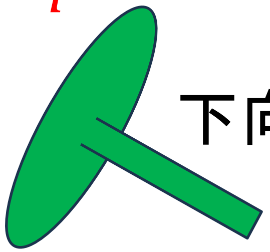
画鋲



上向き

確率:

$1 - p = 0.38$

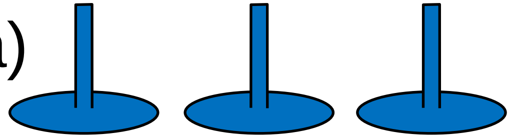


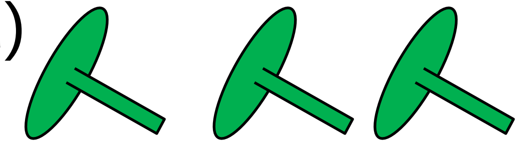
下向き

「第1種の過誤」:
帰無仮説が正しいのに棄却されてしまう誤り

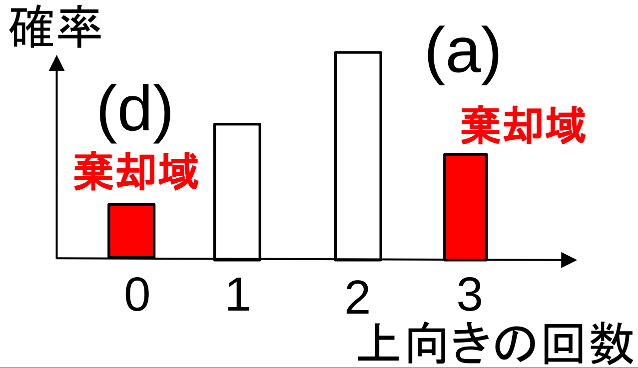
帰無仮説H_0が正しい $\Rightarrow p = 0.62$

H_0: 棄却するケース

(a)  となる確率 $= p^3 = 0.62^3 = 0.238$

(d)  となる確率 $= (1-p)^3 = 0.38^3 = 0.055$

確率の合計: 0.293



一致するのは
(答)②

済

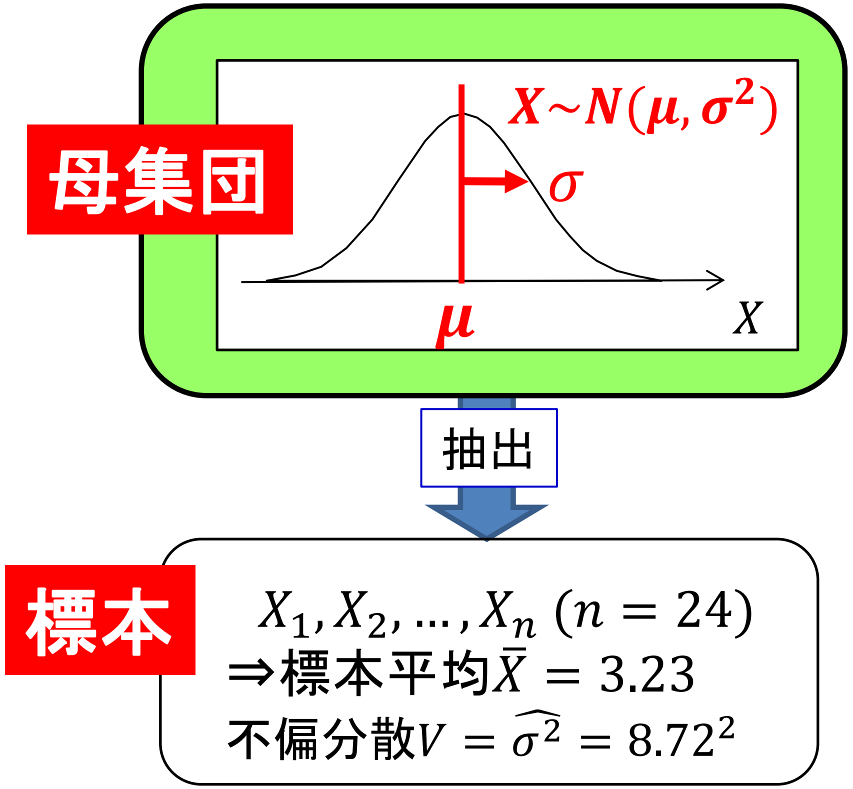
(p108.3)[C8]問2. (補足)第1種の過誤・確率

「第1種の過誤」に関係した項目として、
・第2種の過誤
・検出力
があります。
⇒関連する問題:
・p123問10
・p184問13
があります。必要に応じて参照してください。

(p110.1)[C8]問3. 母平均の片側t検定

(Aランク)

対象:　amazon.comの株価の月次変化率(%)



帰無仮説(H_0):$\boldsymbol{\mu = \mu_0}$　$(\boldsymbol{\mu_0 = 0})$

対立仮説(H_1) :$\boldsymbol{\mu > \mu_0}$　　(片側検定)

の検定を行った場合の検定結果は？

例:

-23.13	4.63	-4.32	10.84
-4.95	12.61	8.07	3.53
23.06	2.04	-7.06	-19.44
-5.22	6.90	2.15	-0.08
13.30	8.49	18.10	15.83
9.95	12.03	27.00	33.12

役立つ知識:

母平均の検定(母分散$\boldsymbol{\sigma^2}$が未知の場合)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}$$ は自由度n-1のt分布に従う

を使います

標本平均:$\bar{X}$,母平均:μ、不偏分散: $\widehat{\sigma^2}$, サンプルサイズ:n

(p110.2)[C8]問3. 母平均の片側t検定

(Aランク)

サンプルサイズ: $n = 24$
標本平均 $\bar{X} = 3.23$
不偏分散 $\widehat{\sigma^2} = 8.72^2$

帰無仮説(H_0) : $\boldsymbol{\mu = \mu_0}$ ($\boldsymbol{\mu_0 = 0}$)
が正しい時の検定統計量:

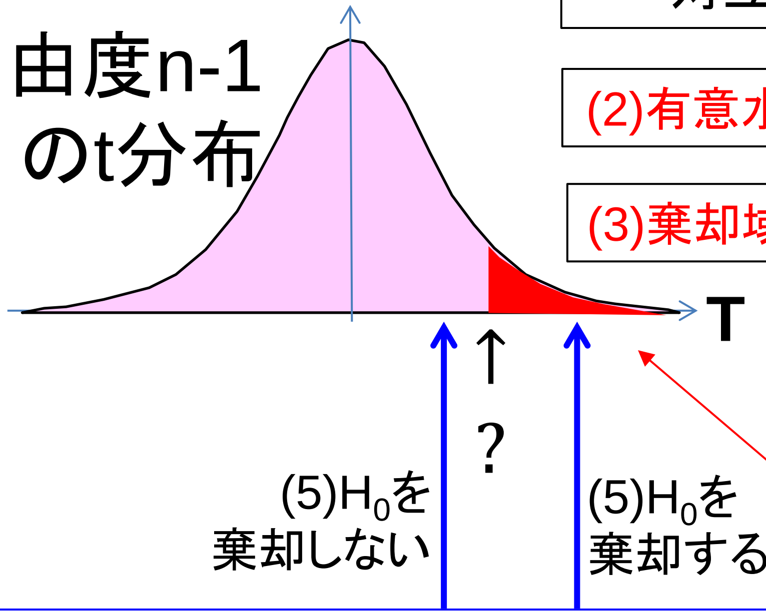
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} = \frac{3.23 - 0}{\sqrt{\frac{8.72^2}{24}}} = 1.815$$

(1) 帰無仮説(H_0): $\boldsymbol{\mu = 0}$
対立仮説(H_1): $\boldsymbol{\mu > 0}$

(2)有意水準: ●%

(3)棄却域

T ~ 自由度n-1のt分布



(4)検定統計量 $T = \mathbf{1.815}$ はどこ？

$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}$ は自由度n-1のt分布に従う

(注)対立仮説(H_1) : $\boldsymbol{\mu > \mu_0 (= 0)}$ (片側検定)
を考えるので、棄却域は右側に設定します

(p110.3)[C8]問3. 母平均の片側t検定

(Aランク)

既知の情報

$n = 24$
$T = 1.815$

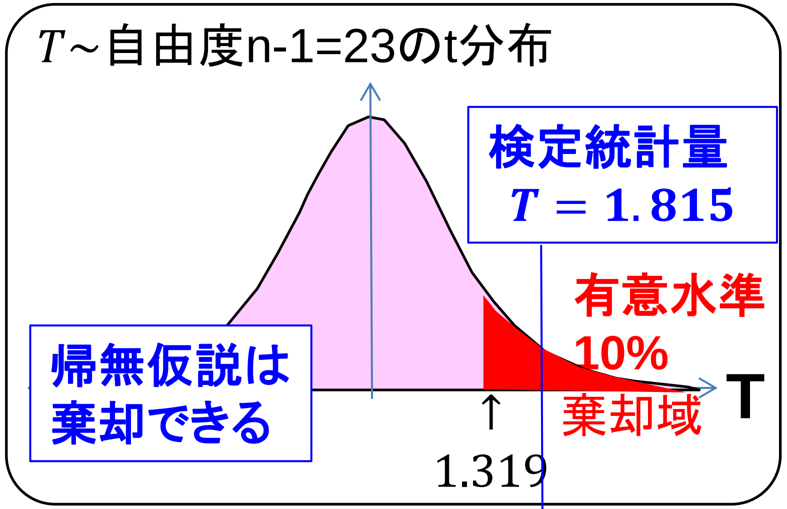
Q: 各有意水準に応じた棄却域はどうなりますか？

(例)標準正規分布

2.5%

z

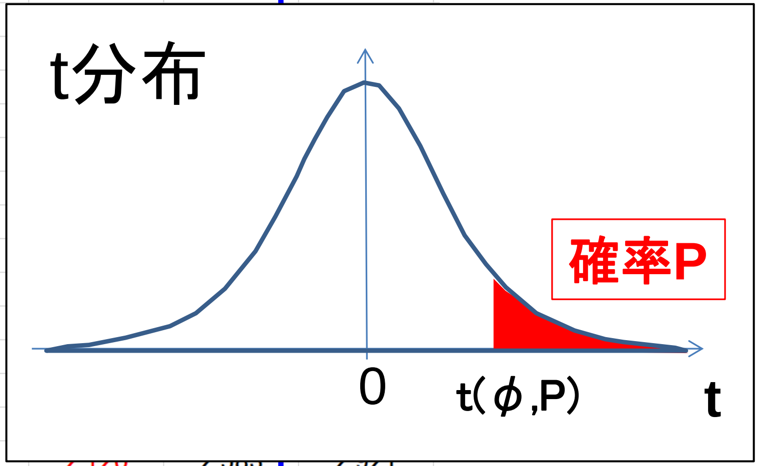
1.96



帰無仮説は棄却できる	5%	1.714
帰無仮説は棄却できない	2.5%	2.069
帰無仮説は棄却できない	1%	2.500

(答)③ 済

片側P=	0.100	0.05	0.025	0.01	0.005
(両側2P=)	0.200	0.10	0.05	0.02	0.01
ϕ= 1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353			
4	1.533	2.132			
5	1.476	2.015			
6	1.440	1.943			
7	1.415	1.895			
8	1.397	1.860			
9	1.383	1.833			
10	1.372	1.812			
11	1.363	1.796			
12	1.356	1.782			
13	1.350	1.771			
14	1.345	1.761			
15	1.341	1.753			
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750

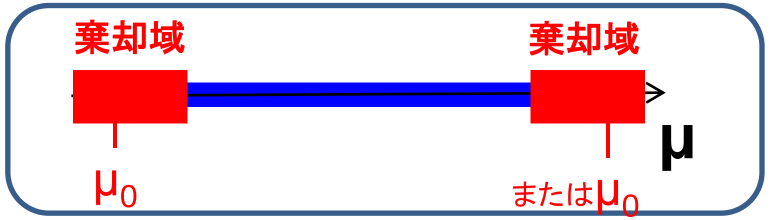


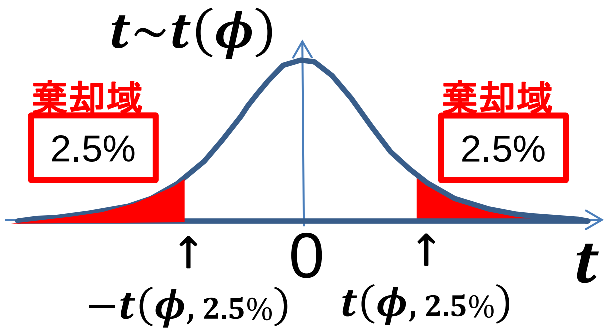
(p110.4) (補足)片側検定での棄却域(母分散：未知の場合)

両側検定

帰無仮説　$H_0: \mu=\mu_0$

対立仮説　$H_1: \mu\neq\mu_0$



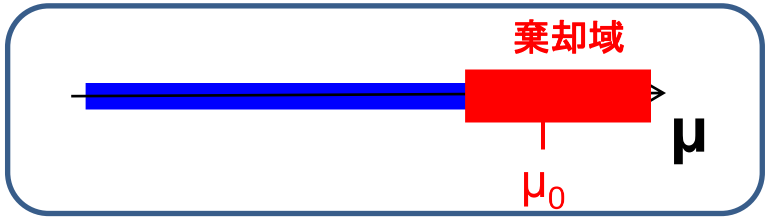


棄却域 : $|t| > t(\phi, 2.5\%)$

片側検定

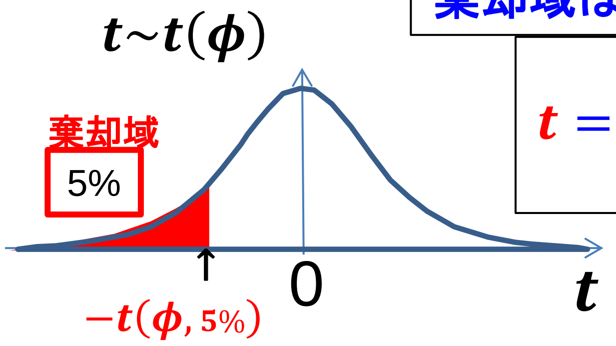
帰無仮説　$H_0: \mu=\mu_0$

対立仮説　$H_1: \mu<\mu_0$



棄却域は入れ替わる

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{V/n}}$$

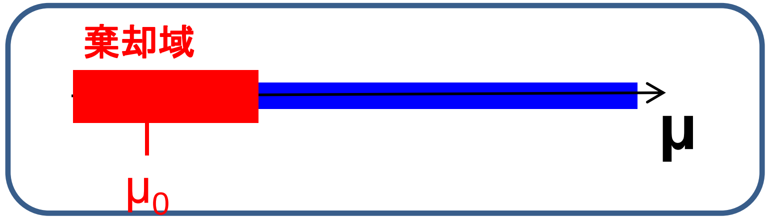


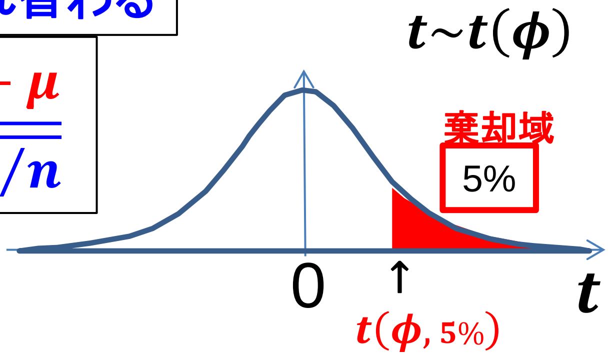
棄却域 :　$t < -t(\phi, 5\%)$

片側検定　(公式)

帰無仮説　$H_0: \mu=\mu_0$

対立仮説　$H_1: \mu>\mu_0$

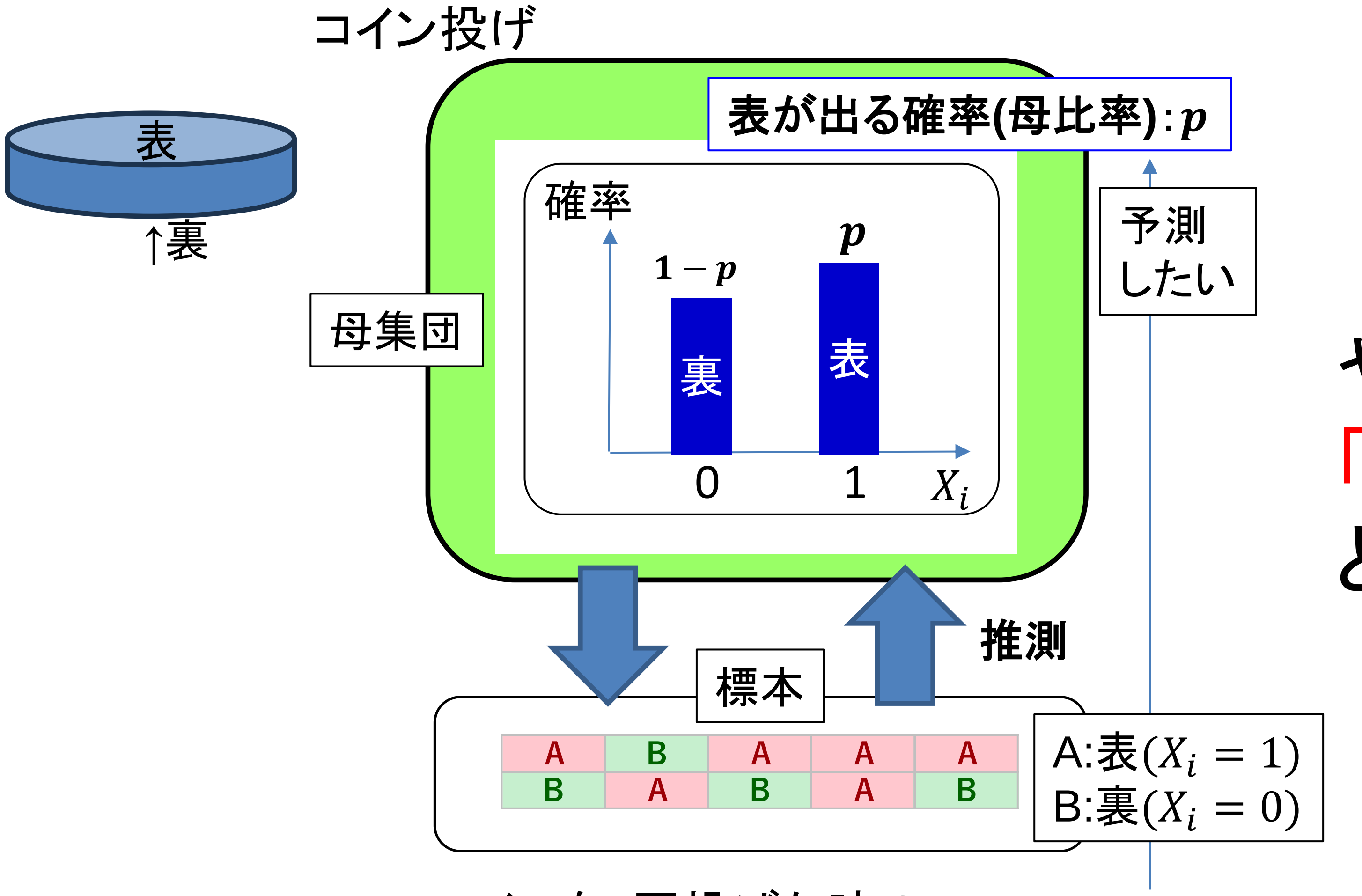




棄却域 :　$t > t(\phi, 5\%)$

(p112.1)[C8]問4. 母比率の検定の手順

(Aランク)



やること:
「表が出る確率pがp_0である」
という仮説を検定する

コインをn回投げた時の、
表がでた割合を$\hat{p}$とする
($\hat{p}=p$の推定量)

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(p112.2)[C8]問4. 母比率の検定の手順

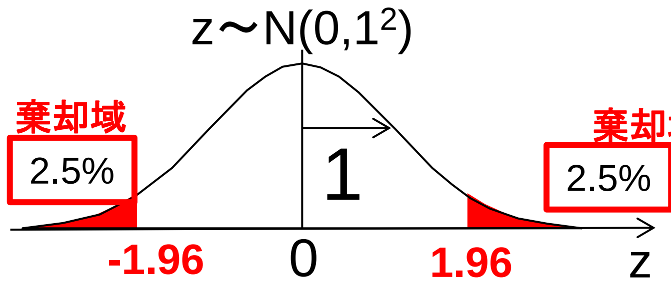
(Aランク)

(1)： 2つの仮説を立てます
帰無仮説 H_0: $p = p_0$（$p_0 = ▲$)
対立仮説 H_1: $p \neq p_0$

「$p < p_0$」または「$p > p_0$」⇒片側検定
「$p \neq p_0$」⇒両側検定
(答)(ア)は両側(検定)

公式
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$
は$N(0,1)$に従う

(2)： 有意水準αを定めます
α=0.05=5%



(3)：棄却域を定めます
棄却域：|z|>1.96

(答)(イ)は1.96

(答)(ウ)は
H_0:帰無(仮説)

(4)：帰無仮説H_0が正しい時の
検定統計量:$z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$を計算します
($z_0 = ●$)

(5)： H_0を棄却する・しないの判定
$z = z_0$が棄却域にあれば、 H_0を棄却する
⇒ H_1は正しいと言える
$z = z_0$が棄却域になければ、H_0は棄却できない
⇒ H_1は正しいかどうか何も言えない

(ア)：両側(検定)、(イ)1.96、(ウ)帰無(仮説) ⇒(答)⑤

済

(p114.1)[C8]問5. 正規近似を用いた検定

(A～Bランク)

A社の製作機械で作られた試作品:不良品あり。
その比率についての問題です

メーカーから聞いていた
不良品率=0.05

$n=200$個の試作品を調べた結果
不良品の数は16個であった。
標本の不良品率:$\hat{r}=\frac{16}{200}=0.08$
(標本比率)

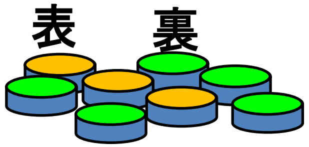
違いあり
・たまたま違う?
・本質的に違う?

Q: P値はいくら？

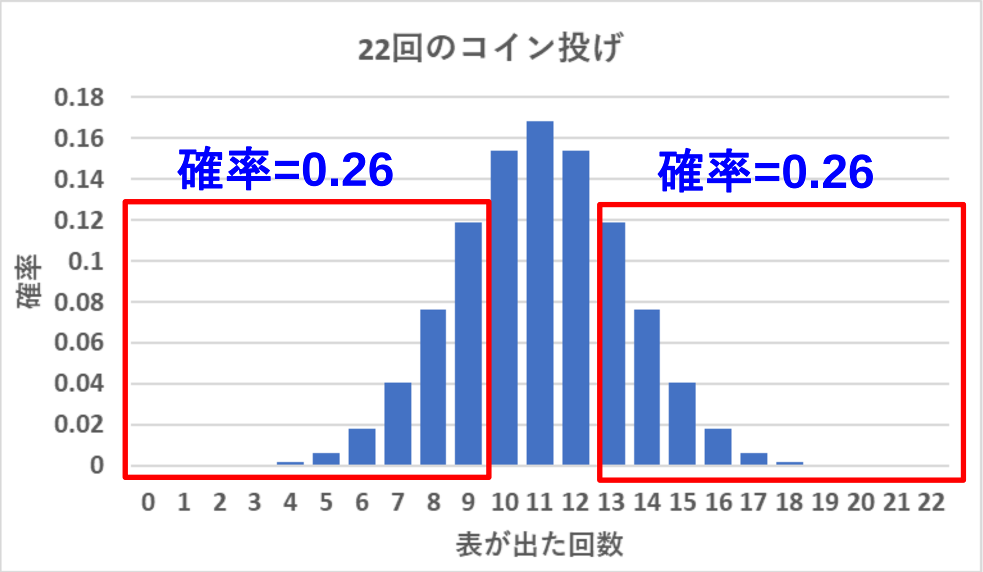
(p114.2)[C8]問5.補足1：P値

有意水準=0.05の時

コイン投げを22回しました。
表が出る確率をpとします
⇒ pは0.5と言える？
⇒ pは0.5とは異なると言える？



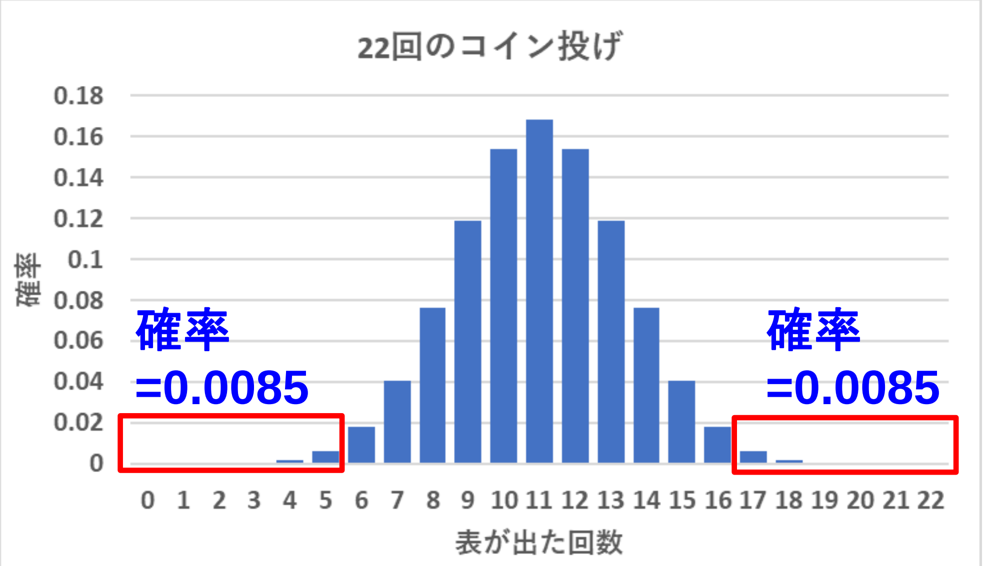
帰無仮説　H_0: $p = 0.5$
対立仮説　H_1: $p \neq 0.5$



表：13回、裏：9回でした

P値=どの程度起こりにくいことが起こったかを確率で示す指標

表：13回以上、裏：9回以下
裏：13回以上、表：9回以下
P値=確率(計)=0.52　>有意水準
⇒ありふれたことが起こった
⇒帰無仮説H_0は棄却しない



表：17回、裏：5回でした

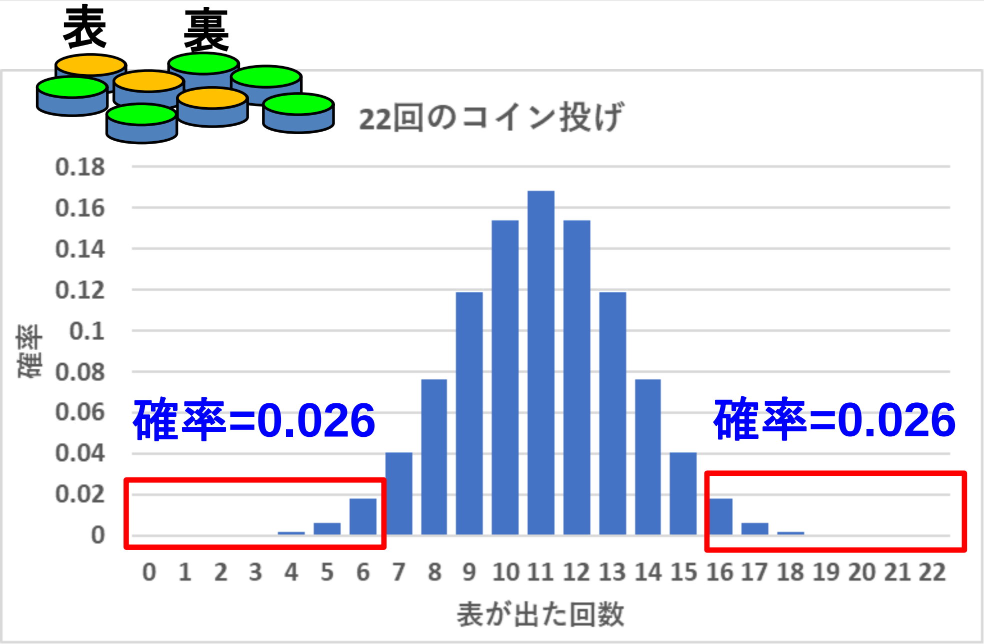
表：17回以上、裏：5回以下
裏：17回以上、表：5回以下
P値=確率(計)=0.017　<有意水準
⇒めったにないことが起こった
⇒帰無仮説H_0を棄却する

(p114.3)[C8]問5.補足2：P値(両側検定と片側検定)

有意水準=0.05の時

コイン投げを22回しました。
表が出る確率をpとします
⇒ pは0.5と言える？
⇒ pは0.5とは異なると言える？

帰無仮説　$\mathrm{H_0}: p = 0.5$
対立仮説　$\mathrm{H_1}: p \neq 0.5$
(両側検定)

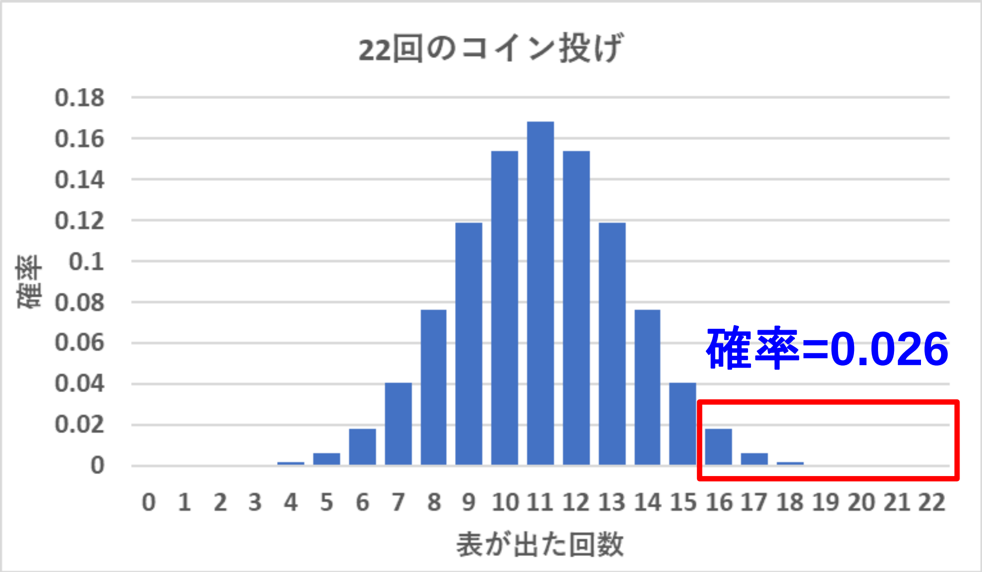


表：16回、裏：6回でした

表：16回以上、裏：6回以下
裏：16回以上、表：6回以下
P値=確率(計)=0.052　>有意水準
⇒ありふれたことが起こった
⇒帰無仮説$\mathrm{H_0}$は棄却しない

⇒ pは0.5と言える？
⇒ pは0.5より大きいと言える？

帰無仮説　$\mathrm{H_0}: p = 0.5$
対立仮説　$\mathrm{H_1}: p > 0.5$
(片側検定)

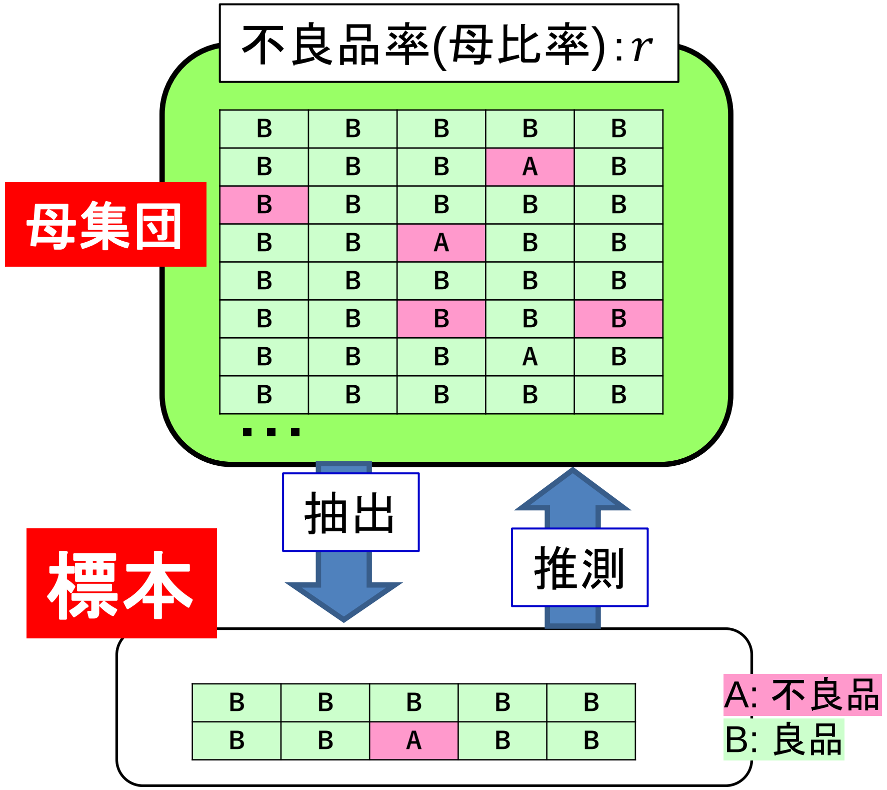


表：16回、裏：6回でした

表：16回以上、裏：6回以下
P値=確率(計)=0.026　<有意水準
⇒めったにないことが起こった
⇒帰無仮説$\mathrm{H_0}$を棄却する

(p114.4)[C8]問5. 正規近似を用いた検定

(A～Bランク)



$n=200$個の試作品を調べた結果
不良品の数は16個であった。

標本の不良品率:$\hat{r}=\frac{16}{200}=0.08$
(標本比率)

やりたいこと:
母集団の不良品率(母比率): $r=0.05$ または、$r>0.05$
かどうかを調べたい

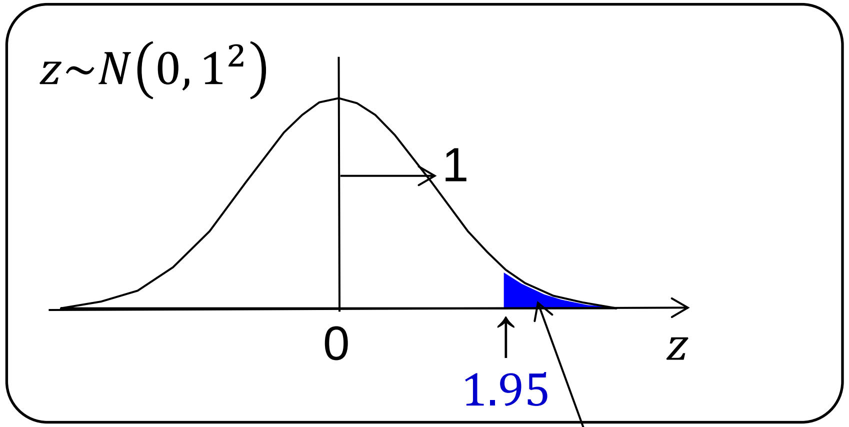
関連問題:
p72,問4
p74,問5
p78,問1
p94,問1
など

帰無仮説: $r=0.05$
対立仮説: $r>0.05$ (片側検定)

いつもの式:

$$\hat{r} \sim N\left(r, \frac{r(1-r)}{n}\right)$$

$$z=\frac{\hat{r}-r}{\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}} \sim N(0,1)$$



確率(P-値)=0.0256
(答)②

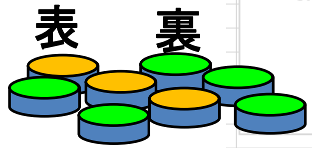
帰無仮説が正しい時($r=0.05$の時)、

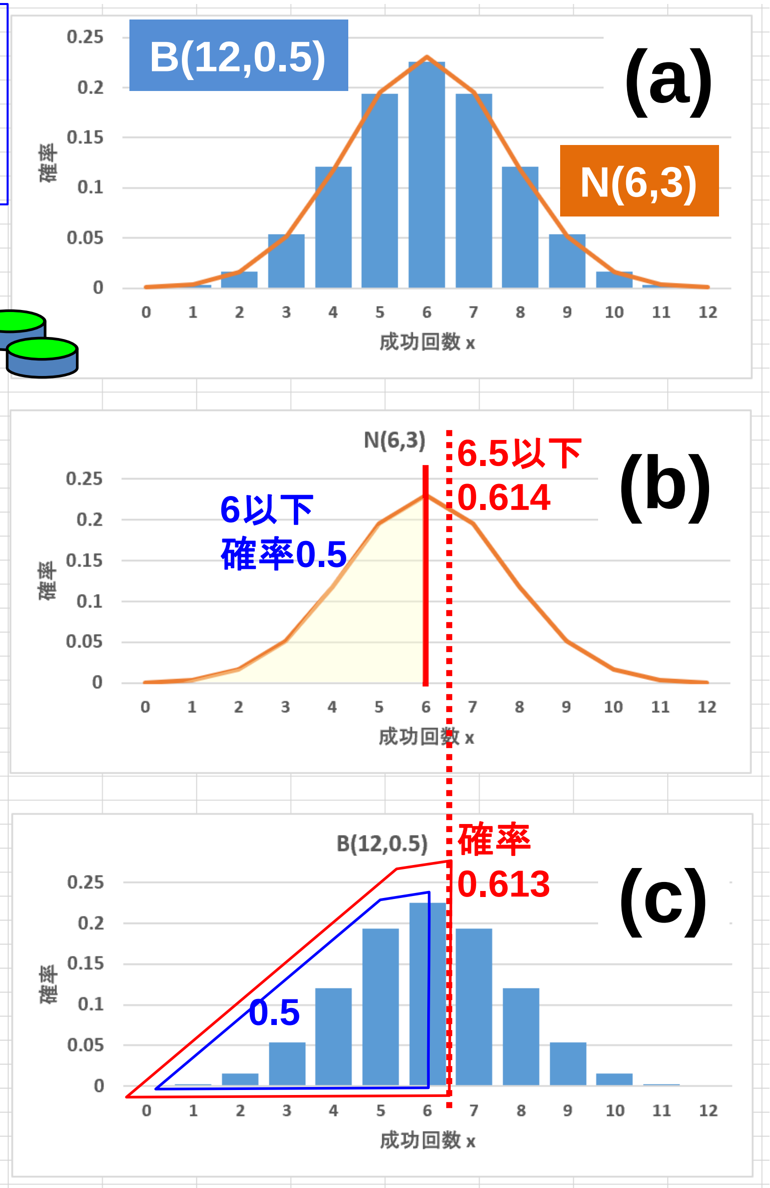
$$z=\frac{\hat{r}-r}{\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}}=\frac{0.08-0.05}{\sqrt{\frac{0.05\times(1-0.05)}{200}}}=1.95$$

済

(p114.5)[C8]問5. (補足)「連続修正」とは

難しいと
感じる方は、
気楽に
お聴きください





例として、12枚のコイン投げをして、表が出る枚数xを考えます。
コインの表が出る確率は0.5とします。
左図では、表が出る枚数xを成功回数xと表現しています。

xは、二項分布B(12,0.5)に従います。
●この二項分布で、x≦6となる確率を計算すると、
0.613(*1)となります。

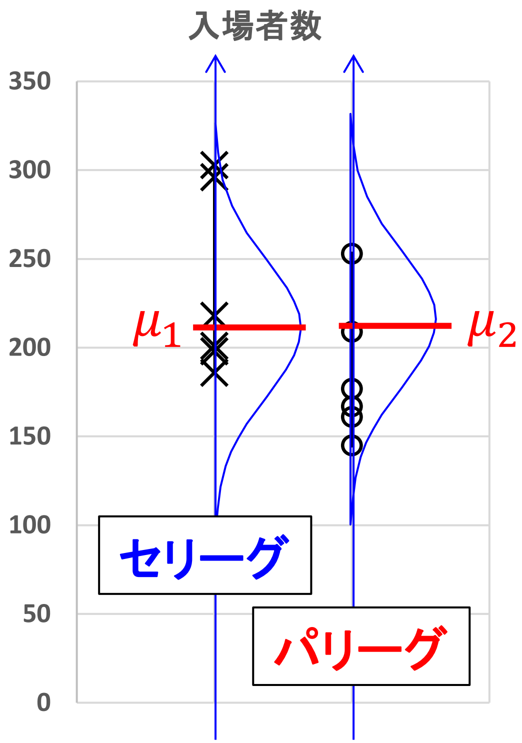
二項分布B(12,0.5)を、正規分布で近似した場合、
N(6,3)と近似できます。
●この正規分布でx≦6となる確率を計算すると、
0.5(*2)となります。(*1,*2は異なっています)

二項分布(横軸:離散値)で6以下
⇔正規分布(横軸:連続値)では6.5以下　に起因します。
正規分布で6.5以下となる確率を計算すると、0.614となり、
より精度が高い確率計算ができます。

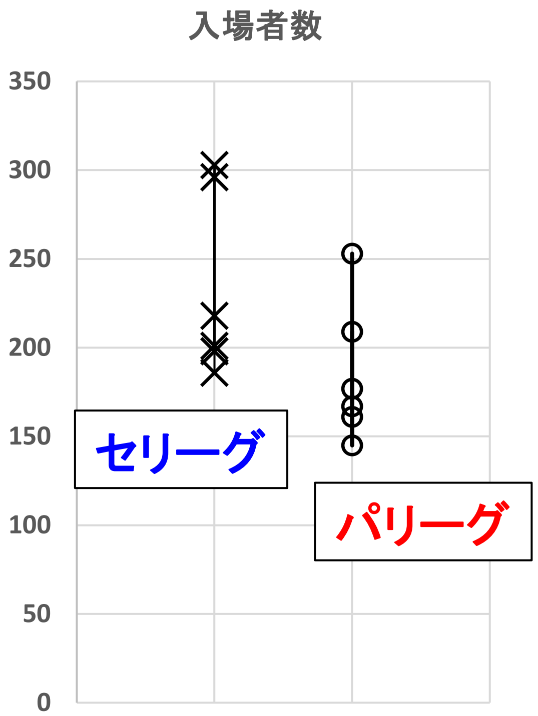
(「半整数補正」や「連続修正」と呼ばれます)

(p116.1)[C8]問6. 母平均の差の検定

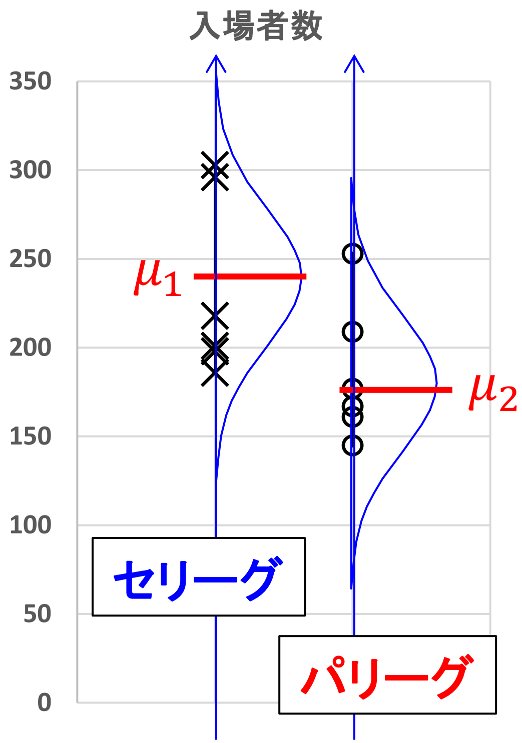
(Bランク)



母平均に差がない
($\mu_1 = \mu_2$)けど
たまたま今回の値を得た
(帰無仮説)



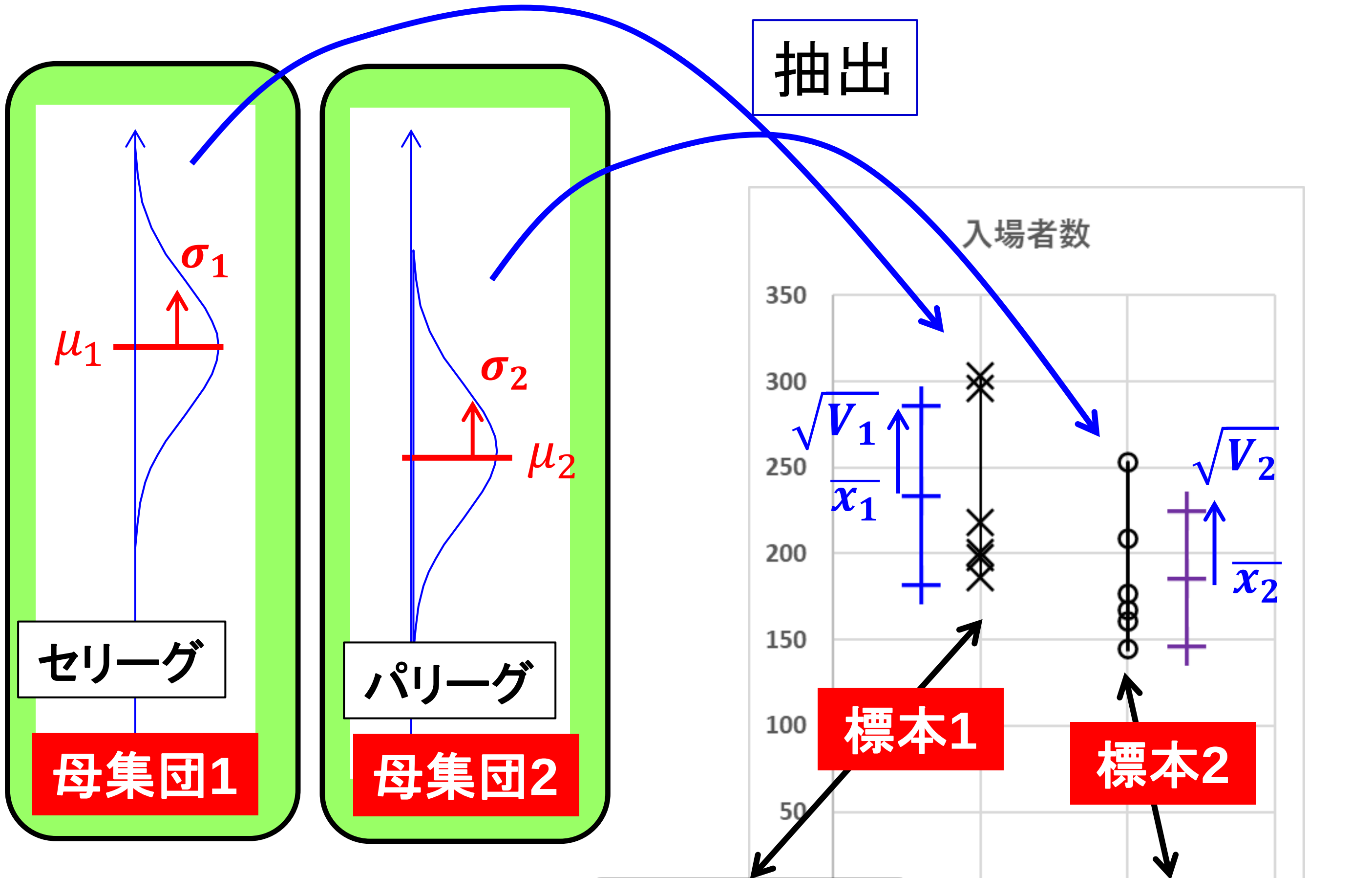
セリーグの方が
パリーグより
多そう



母平均に差があった
($\mu_1 \neq \mu_2$)ので、
今回の値を得た
(対立仮説)

(p116.2)[C8]問6. 母平均の差の検定

(Bランク)



分散：$\sigma_1^2 \fallingdotseq \sigma_2^2$
とします。
(統計検定2級では、
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$は範囲外です）
(Welchの検定)

セリーグ
$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$
標本平均: $\overline{x_1}$,
不偏分散: V_1
サンプルサイズn_1
平方和: $S_1 = (n_1 - 1)V_1$

パリーグ
$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$
標本平均: $\overline{x_2}$,
不偏分散: V_2
サンプルサイズn_2
平方和: $S_2 = (n_2 - 1)V_2$

Q: t値を得るには、
どんな計算をすればいい？
t値はどんな分布に従う？

tは、自由度ϕのt分布に従う。

検定統計量：

$$t = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(\phi)$$

2つの不偏分散
$V_1, V_2 \Rightarrow$
合併した分散:

$$V = \frac{V_1\phi_1 + V_2\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$$

自由度:
$\phi_1 = n_1 - 1,$
$\phi_2 = n_2 - 1$
$\Rightarrow \phi = \phi_1 + \phi_2$
$= n_1 + n_2 - 2$

(p116.3)[C8]問6. (参考)検定統計量の比較

式を憶えられない方へ:　 式は、似ていますね。 以下の順で、是非憶えてください。

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$ →(標本平均)→ $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ →(標準化)→

母平均の検定推定
(母分散: σ^2既知の時)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

↓

母平均の検定推定
(母分散: 未知の時)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t(n-1)$$

不偏分散を 1個使うと
自由度は 1だけ減る

↓

母平均の差の検定推定
(母分散: $\sigma_1^2 \fallingdotseq \sigma_2^2$の時)

$$t = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

不偏分散を 2個使うと
自由度は 2だけ減る

自由度で重みを
つけた分散

合併した分散: $V = \frac{V_1\phi_1 + V_2\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$

自由度: $\phi_1 = n_1 - 1$
$\phi_2 = n_2 - 1$

母集団の情報: 赤字
μ: 母平均
σ^2: 母分散

標本の情報: 青字
$\bar{x}$: 標本平均
n: サンプルサイズ
V: 不偏分散

母集団の情報: 赤字
μ_1, μ_2: 母平均

標本の情報: 青字
$\overline{x_1}, \overline{x_2}$: 標本平均
V_1, V_2: 不偏分散
n_1, n_2: サンプルサイズ

(p116.4)[C8]問6. 母平均の差の検定

(Bランク)

セリーグ:
標本平均: $\overline{x_1} = 233.7$
サンプルサイズ $n_1 = 6$
自由度: $\phi_1 = 6 - 1 = 5$
偏差平方和: $S_1 = 13549$
不偏分散: $V_1 = \dfrac{S_1}{\phi_1} = 13549/5$

パリーグ:
標本平均: $\overline{x_2} = 185.3$
サンプルサイズ $n_2 = 6$
自由度: $\phi_2 = 6 - 1 = 5$
偏差平方和: $S_2 = 7763$
不偏分散: $V_2 = \dfrac{S_2}{\phi_2} = 7763/5$

p168問3[1]と同じ問題です。
p169[2]では、「分散分析」を使って
この問題を解きます。検定結果は違うでしょうか？
同じでしょうか？お楽しみに！

帰無仮説　H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
対立仮説　H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

合併した分散:

$$V = \frac{V_1\phi_1 + V_2\phi_2}{\phi_1 + \phi_2} = \frac{S_1 + S_2}{\phi_1 + \phi_2}$$

$$= \frac{13549 + 7763}{5 + 5} = 2131.2$$

帰無仮説が正しい時
($\mu_1 - \mu_2 = 0$)の検定統計量

$$t = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{233.7 - 185.3 - 0}{\sqrt{2131.2 \times \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}\right)}} = \frac{48.4}{26.65} = 1.816$$

済

(答)④

(p116.5)[C8]問6. (参考)母平均の差の検定

(Bランク)

(例)有意水準を5%とした場合の検定結果

(1): 2つの仮説を立てます

母集団1 :(セリーグ)母集団2:(パリーグ)

帰無仮説 H_0: $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 = 0}$

対立仮説 H_1: $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 \neq 0}$

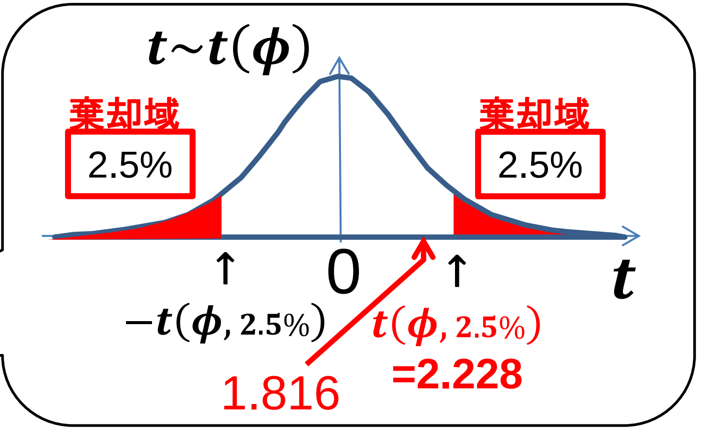
(2): 有意水準αを定めます. α=0.05=5%

(3):棄却域を定めます

棄却域:$|t| > t(\phi, 2.5\%)$

$\Rightarrow |t| > t(10, 2.5\%) = 2.228$

但し自由度:$\phi = n_1 + n_2 - 2 = 10$



t分布表(上側確率P点)

		片側P=	0.100	0.05	0.025
		(両側2P=)	0.200	0.10	0.05
φ=	1		3.078	6.314	12.706
	2		1.886	2.920	4.303
	3		1.638	2.353	3.182
	4		1.533	2.132	2.776
	5		1.476	2.015	2.571
	6		1.440	1.943	2.447
	7		1.415	1.895	2.365
	8		1.397	1.860	2.306
	9		1.383	1.833	2.262
	10		1.372	1.812	2.228
	11		1.363	1.796	2.201
	12		1.356	1.782	2.179

(4):帰無仮説H_0が正しい時の

検定統計量:$t_0 = \dfrac{(\overline{x_1} - \overline{x_2})}{\sqrt{V\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$を計算します

$n_1 = 6, n_2 = 6, \overline{x_1} = 233.7, \overline{x_2} = 185.3, V = 2131.2$

$$t_0 = \frac{233.7 - 185.3}{\sqrt{2131.2 \times (\frac{1}{6} + \frac{1}{6})}} = 1.816$$

(5): H_0を棄却する・しないの判定

t_0 =(1.816) は棄却域に(ある ・ ない)

どっちですか?

( ) $t = t_0$が棄却域にあるので、H_0を棄却する

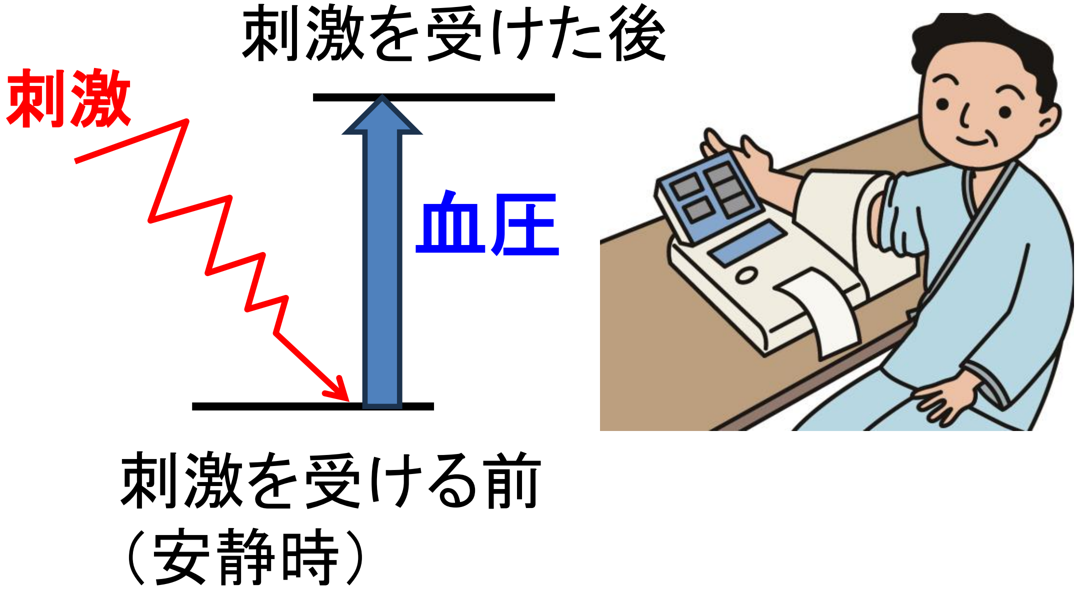
⇒ H_1は正しいと言える

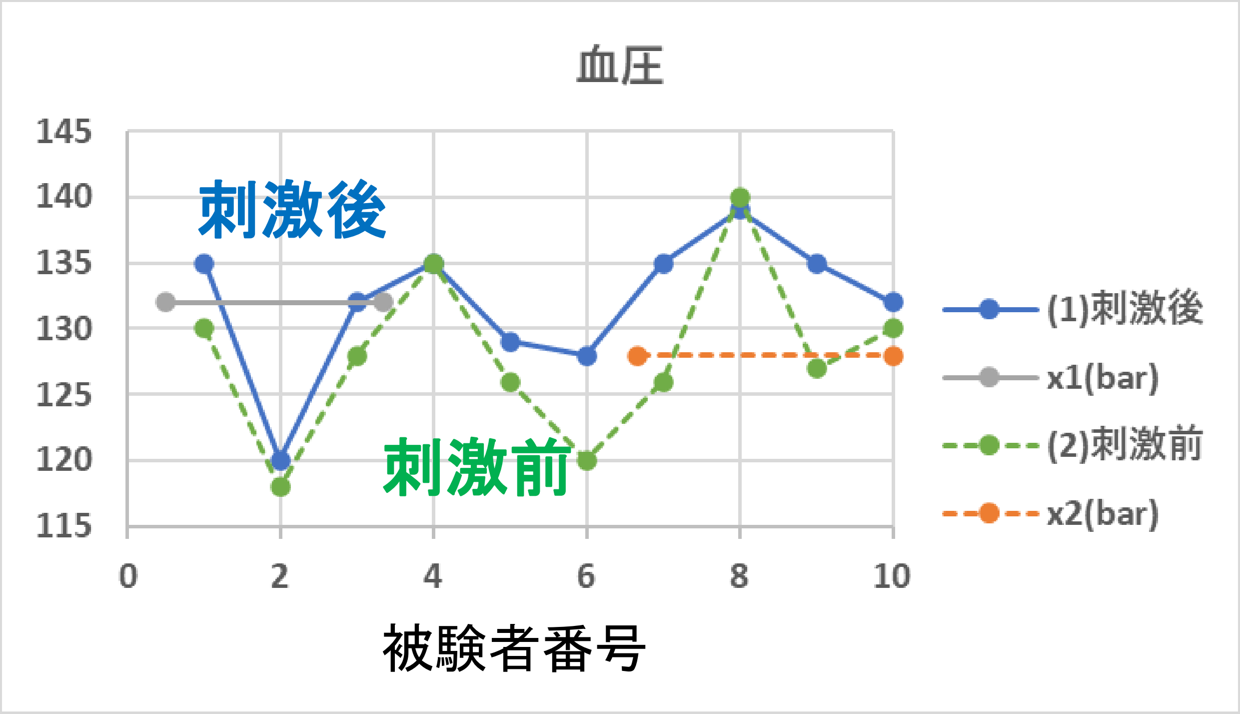
(●) $t = t_0$が棄却域にないので、H_0は棄却できない

⇒ H_1は正しいかどうか何も言えない

(p118.1)[C8]問7. 対応差の検定

(Bランク)





刺激受けると、血圧が上がると言えるか？を**検定**したい

・自由度？
・棄却域？

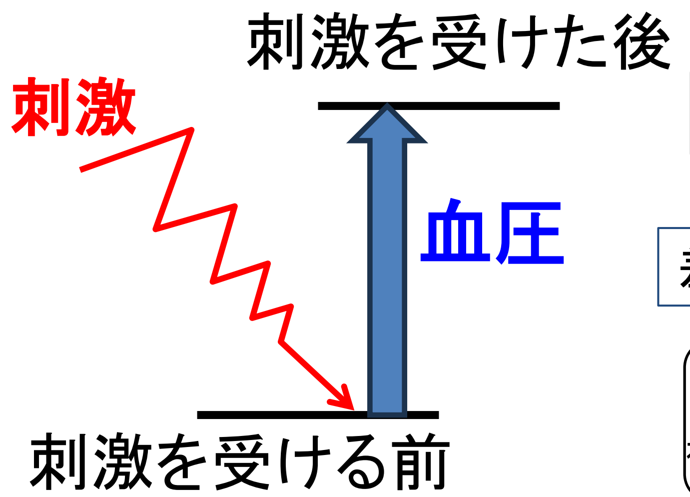
(p118.2)[C8]問7. 対応差の検定

(Bランク)

Q. p116問6セリーグ・パリーグの入場者数でやった、「母平均の差の検定」をそのまま使えばいい？

対応のない母平均の差の検定

A. ×です。「対応のある母平均の差の検定」を使う必要があります。



$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$

差： d_1 d_2 d_n

$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}$

被験者1 , 2 , ..., n

$d_j = x_{1j} - x_{2j} \ (j = 1, \ldots, n)$

$\bar{d} = d_1, \ldots, d_n$の平均

n: サンプルサイズ

$V_d = d_1, \ldots, d_n$の不偏分散

$$d \sim N(\mu, \sigma_d^2)$$

母平均μ
母分散σ_d^2

$$\bar{d} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_d^2}{n}\right)$$

母分散σ_d^2: 既知なら

$$z = \frac{\bar{d} - \mu}{\sqrt{\sigma_d^2 / n}} \sim N(0,1)$$

母分散σ_d^2: 未知なら

$$t = \frac{\bar{d} - \mu}{\sqrt{V_d / n}} \sim t(n-1)$$

(参考)母平均の検定の場合

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{V / n}} \sim t(n-1)$$

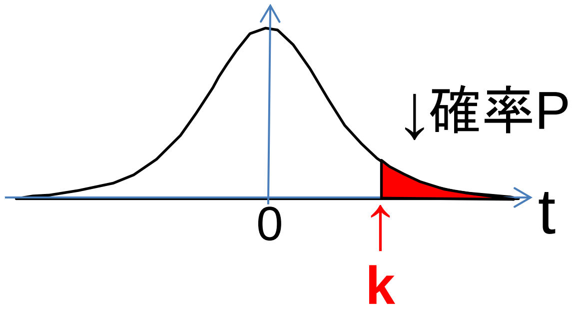
(p118.3)[C8]問7. 対応差の検定

(Bランク)

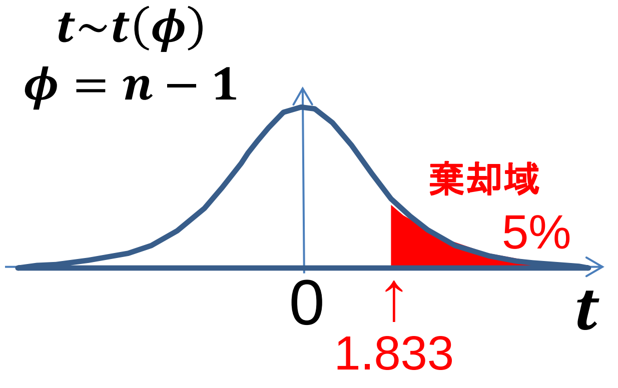
問題:「血圧が上がる変化がある」か？

帰無仮説　H_0: μ=0

対立仮説　H_1: μ>0　片側検定



k=自由度φのt分布での上側P点



$$t = \frac{\bar{d} - \mu}{\sqrt{V_d / n}} \sim t(n-1)$$

有意水準α=0.05

サンプルサイズ:n=10

自由度:φ= 10-1=9

片側P=	0.100	0.05	0.025
φ= 1	3.078	6.314	12.706
2	1.886	2.920	4.303
3	1.638	2.353	3.182
4	1.533	2.132	2.776
5	1.476	2.015	2.571
6	1.440	1.943	2.447
7	1.415	1.895	2.365
8	1.397	1.860	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228
11	1.363	1.796	2.201

Q: 自由度は？棄却域は？

(答) 自由度(φ)=9,
棄却域は、$t \geq 1.833$　⇒①

済

(p118.4)[C8]問7. (参考)対応差の検定

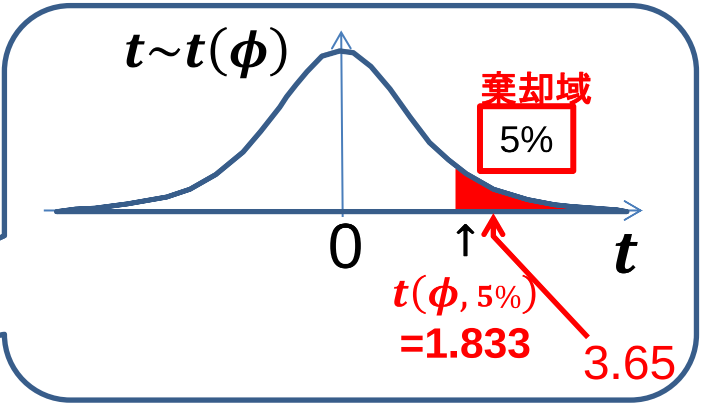
(Bランク)

①: 2つの仮説を立てます
データ1 :(刺激後) データ2:(刺激前)
μ: 刺激による血圧の変化
帰無仮説 H_0:$\mu = 0$
対立仮説 H_1:$\mu > 0$

②: 有意水準αを定めます. α=0.05=5%

③:棄却域を定めます
棄却域:$t > t(\phi, 5\%)$
$\Rightarrow t > t(9, 5\%) = 1.833$
但し$\phi = \mathrm{n} - 1 = 10 - 1 = 9$

理論:検定統計量($t = \frac{\bar{d}-\mu}{\sqrt{V_d/n}}$)は
(自由度ϕのt分布)に従う



④:帰無仮説H_0が正しい時の
検定統計量:$t_0 = \frac{\bar{d}-0}{\sqrt{V_d/n}}$を計算します

$\bar{d} = 4.0,\quad V_d = 12,\quad n = 10,\quad \phi = 9$

$$t_0 = \frac{\bar{d} - 0}{\sqrt{V_d/n}} = \frac{4}{\sqrt{12/10}} = 3.65$$

⑤: H_0を棄却する・しないの判定
t_0 =(3.65) は棄却域に(ある ・ ない)

どっちですか？
(●)$t = t_0$が棄却域にあるので、H_0を棄却する
⇒ H_1は正しいと言える
( )$t = t_0$が棄却域にないので、H_0は棄却できない
⇒ H_1は正しいかどうか何も言えない

(p120.1)[C8]問8. 母比率の差の検定

(Bランク)

知りたいこと:
母比率の差の検定でのP値？

A社での不良品率(母比率): p_1

母集団

B	B	B	B	B
B	B	B	A	B
B	B	B	B	B
B	B	A	B	B
B	B	B	B	B

A: 不良品
B: 良品

調査で
$n_1 = 200$個
抽出
↓
不良品
=16個

推測

標本

B	B	B	B	B
B	B	A	B	B

標本での不良品率: $\widehat{p_1} = \dfrac{16}{200} = 0.08$

B社での不良品率(母比率) : p_2

B	B	B	B	B
B	B	A	A	B
B	B	B	B	B
B	B	B	A	B
B	B	B	B	B

調査で
$n_2 = 200$個
抽出
↓
不良品
=17個

推測

標本

B	B	A	A	B
B	B	B	B	B

標本での不良品率: $\widehat{p_2} = \dfrac{17}{200} = 0.085$

母比率: p_1
標本比率: $\widehat{p_1}$
サンプルサイズ: n_1

$$\widehat{p_1} \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$$

$$\widehat{p_2} \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

p104問6の解説時と同じ式
スポーツ国際大会での日本選手の活躍に非常に関心がある人の割合(H25,H21)

(p120.2)[C8]問8. 母比率の差の検定

(Bランク)

A社の試作品

$$\widehat{p_1} \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$$

公式問題集p104
の問題と同様な式

B社の試作品

$$\widehat{p_2} \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

(公式)確率変数X, Yが独立の時
分散･･･$V(X-Y) = V(X) + V(-Y)$
$= V(X) + V(Y)$

$$\widehat{p_1} - \widehat{p_2} \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

標準化する

$$z = \frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$\sqrt{\ }$の中の母比率p_1, p_2は
推定量$\widehat{p_1}, \widehat{p_2}$で代用する。

$$z = \frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(p120.3)[C8]問8. 母比率の差の検定

(Bランク)

$\mathrm{H_0}$: 帰無仮説: $d = p_1 - p_2 = 0$
$\mathrm{H_1}$: 対立仮説: $d = p_1 - p_2 \neq 0$ (両側検定)

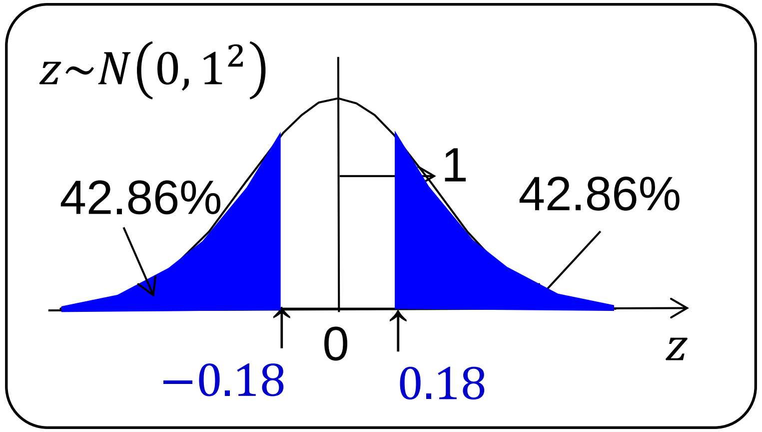
P値の計算を行いたい。
$\mathrm{H_0}$が正しいとした時($p_1 - p_2 = 0$)の検定統計量z_0を求める。

$$\widehat{p_1} = \frac{16}{200} = 0.08,\ \widehat{p_2} = \frac{17}{200} = 0.085, n_1 = 200, n_2 = 200$$

$$z = \frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\boxed{z_0 = \frac{(0.08 - 0.085) - 0}{\sqrt{\frac{0.08 \times (1 - 0.08)}{200} + \frac{0.085 \times (1 - 0.085)}{200}}} = -0.18}$$

P値 $= 0.4286 \times 2 = 0.857$ ⇒(答)⑤



(両側検定を使っているので、
$|z| > 0.18$の確率を求めます)

（蛇足）有意水準=5%で検定すると、
P値=86%>5%なので、$\mathrm{H_0}$は棄却できない
母比率に差があるかどうか、何も言えない

済

(p122.1)[C8]問9. 等分散性の検定

(Bランク)

数学の試験の点数

クラスA

53	85	78	73	42	81
71	61	50	18	34	53
40	41	100	57	37	9

…

標本1

生徒数=21人
(サンプルサイズ$n_1 = 21$)
不偏分散: $V_1 = 19.5^2$

$x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

クラスB

70	46	76	54	78	73
29	41	55	68	60	53
58	43	22	45	46	93

…

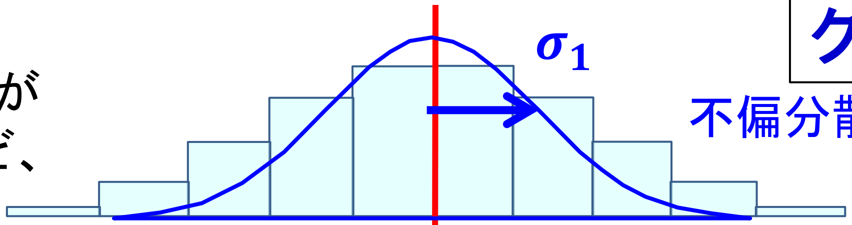
標本2

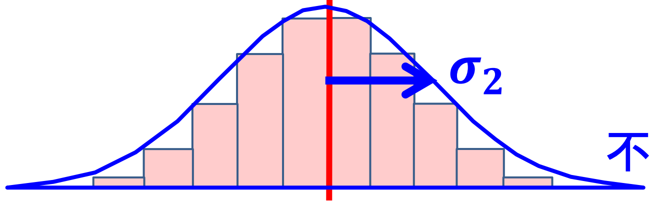
生徒数=41人
(サンプルサイズ$n_1 = 41$)
不偏分散: $V_2 = 14.5^2$

$y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

知りたいこと:
クラスA,Bで、
母分散(σ_1^2, σ_2^2)に
違いがある?

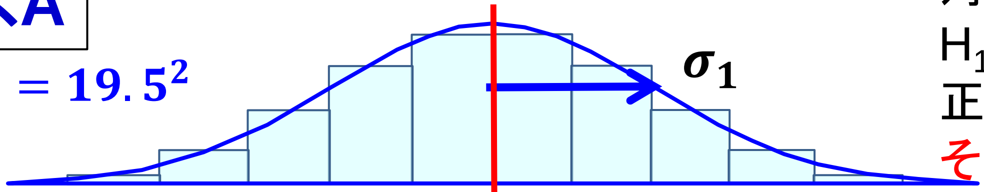
帰無仮説
H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が
正しかったけど、
たまたま
標本の分散に
(不偏分散)
差があった

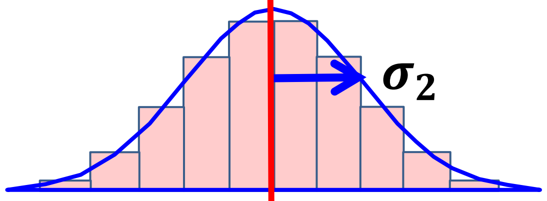




クラスA
不偏分散: $V_1 = 19.5^2$

クラスB
不偏分散: $V_2 = 14.5^2$





対立仮説
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ が
正しかったので、
その結果、
標本の分散に
(不偏分散)
差があった
(両側検定)

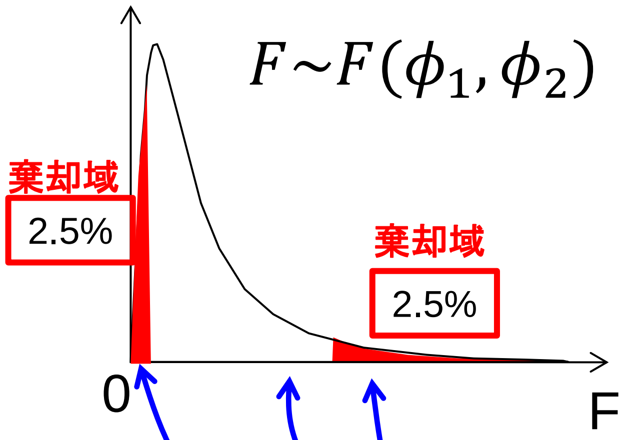
(p122.2)[C8]問9. 等分散性の検定

(Bランク)

(公式)母分散の比の検定

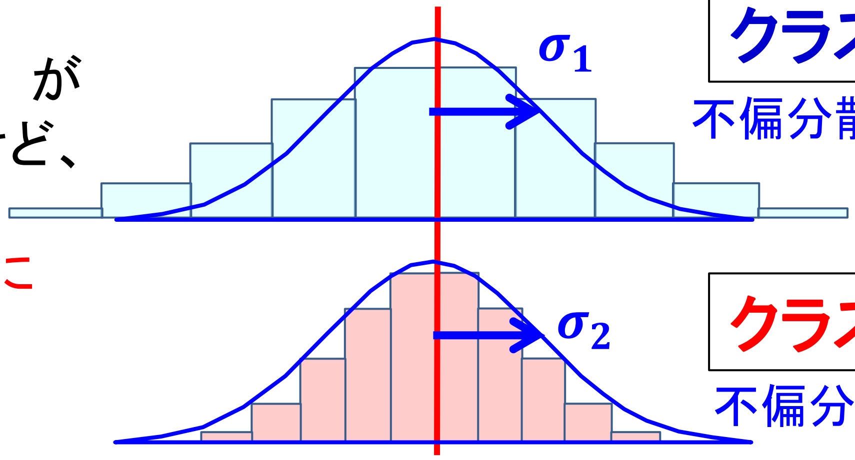
$$F=\frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2}$$ は、

自由度(n_1-1,n_2-1)のF分布に従う



棄却域に入る？
入らない？

帰無仮説
H$_0$: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ が
正しかったけど、
たまたま
標本の分散に
(不偏分散)
差があった



クラスA $n_1=21$

不偏分散: $V_1=19.5^2$

クラスB $n_2=41$

不偏分散: $V_2=14.5^2$

帰無仮説
H$_0$: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ が
正しい時、

$$F=\frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{19.5^2}{14.5^2}=1.809$$

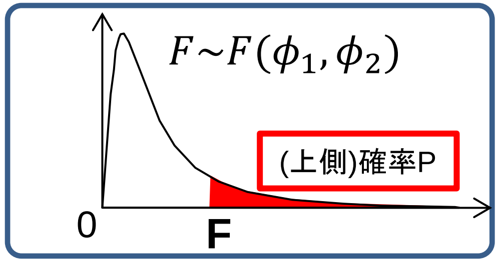
(答)(ア)1.809　⇒② or ③

自由度: $(\phi_1,\phi_2)=(n_1-1,n_2-1)=(20,40)$

⇒　棄却域はどうなる？

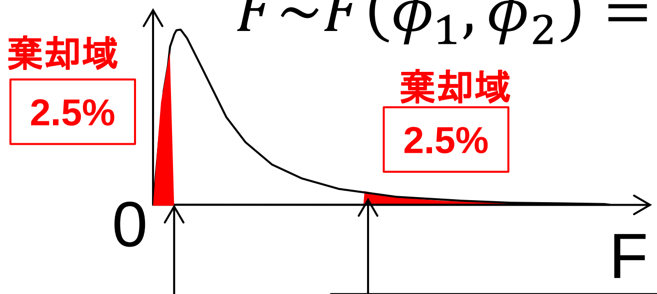
(p122.3)[C8]問9. 等分散性の検定

(Bランク)



Q: 棄却域の境界の値はどうなりますか？

$F \sim F(\phi_1, \phi_2) = F(20{,}40)$



$\boldsymbol{F}(20{,}40;\ \mathbf{97.5\%})$ =0.437

$\boldsymbol{F}(20{,}40;\ \mathbf{2.5\%})$ =2.068

F分布:

P= 0.025

		φ1											
		1	2	3	4	5	15	20	24	30	40	60	120
φ2=	1	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	984.87	993.10	997.25	1001.41	1005.60	1009.80	1014.02
	2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490
	3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.253	14.167	14.124	14.081	14.037	13.9	
	4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	8.657	8.560	8.511	8.461	8.411	8.3	
	5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.428	6.329	6.278	6.227	6.175	6.1	
	15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	2.862	2.756	2.701	2.644	2.585	2.5	
	16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	2.788	2.681	2.625	2.568	2.509	2.4	
	17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	2.723	2.616	2.560	2.502	2.442	2.3	
	18	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	2.667	2.559	2.503	2.445	2.384	2.3	
	19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	2.617	2.509	2.452	2.394	2.333	2.270	2.203
	20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	2.573	2.464	2.408	2.349	2.287	2.223	2.156
	25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.411	2.300	2.242	2.182	2.118	2.052	[illegible]
	30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.307	2.195	2.136	2.074	2.009	1.940	
	40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.182	2.068	2.007	1.943	1.875	1.803	
	60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.061	1.944	1.882	1.815	1.744	1.667	
	120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	1.945	1.825	1.760	1.690	1.614	1.530	

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{20,40};\ \text{下側}\mathbf{2.5\%}) = \frac{1}{\boldsymbol{F}(\mathbf{40,20};\ \text{上側}\mathbf{2.5\%})}$$

$$= \frac{1}{2.287} = 0.437$$

(p92.4)[C6]問8　にて説明済

公式：(F分布で、下側2.5%点などの求め方)

$$F(\phi_1, \phi_2;\ \text{下側}\alpha) = \frac{1}{F(\phi_2, \phi_1;\ \text{上側}\alpha)}$$

(p122.4)[C8]問9. 等分散性の検定

(Bランク)

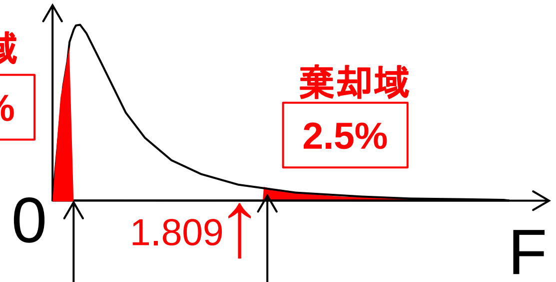
(1): 2つの仮説を立てます
母集団1:(クラスA)母集団2:(クラスB)
帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $(\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1)$
対立仮説 H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $(\sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1)$

(2): 有意水準αを定めます
α=0.05=5%

(3):棄却域を定めます
棄却域:$F < 0.437, F > 2.068$
但し$(n_1, n_2) = (21,41)$
$(\phi_1, \phi_2) = (20,40)$

$V_1 = \mathbf{19.5^2}, V_2 = \mathbf{14.5^2}$

理論:検定統計量($F = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2}$)は(自由度$(\phi_1, \phi_2)$の$F$分布)に従う



(4):帰無仮説H_0が正しい時の
検定統計量:$F_0 = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2}$を計算します

$$F_0 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{19.5^2}{14.5^2} = 1.809$$

(5): H_0を棄却する･しないの判定
F_0 =(1.809) は棄却域に(ある ・ ない)

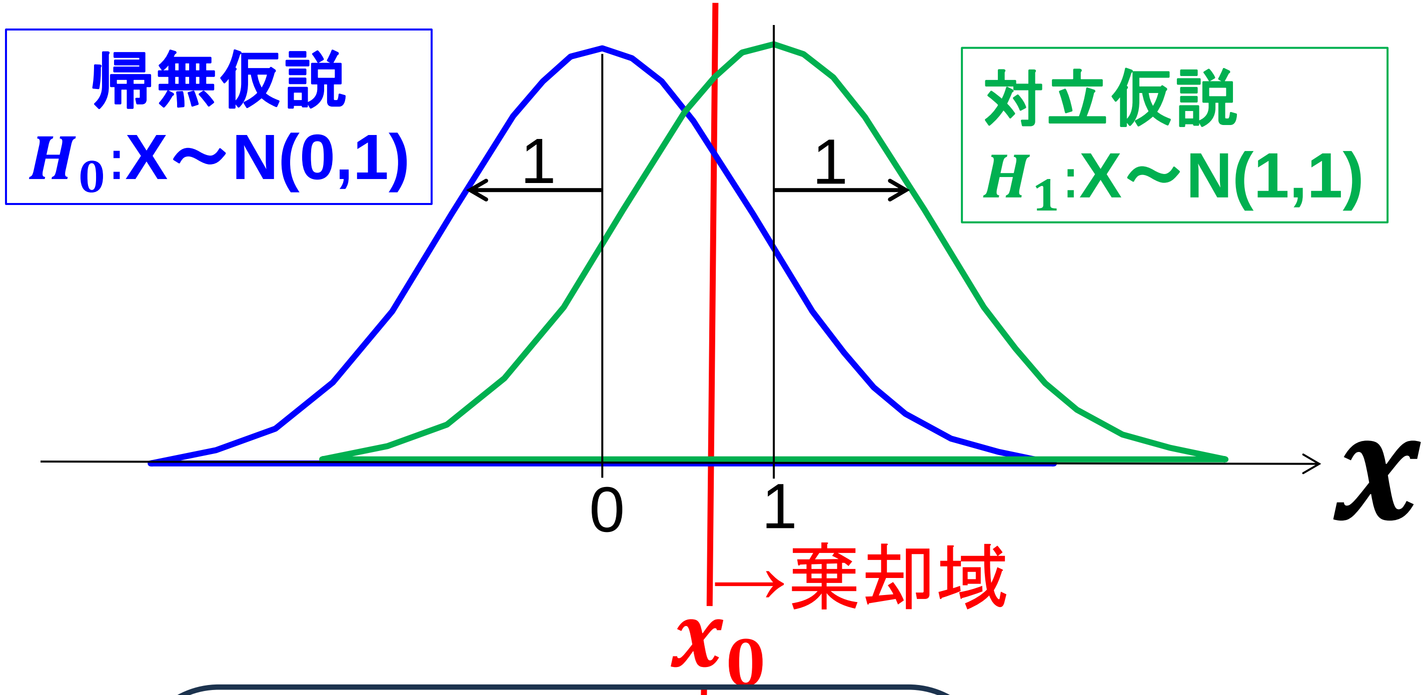
どっちですか？
( )$F = F_0$が棄却域にあるので、H_0を棄却する
⇒ H_1は正しいと言える
(●)$F = F_0$が棄却域にないので、H_0は棄却できない
⇒ H_1は正しいかどうか何も言えない

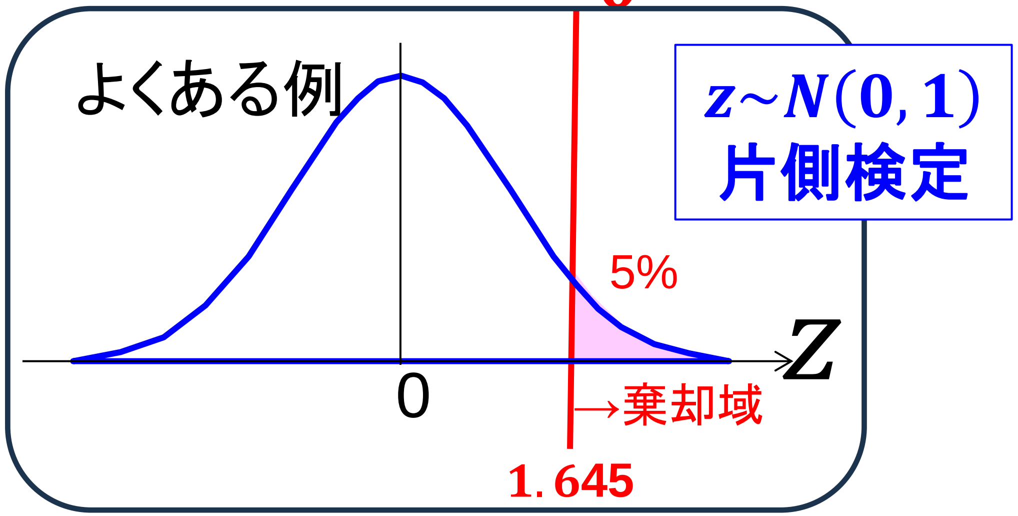
(答)(ア)1.809 (イ)棄却しない ⇒②

済

(p123.1) [C8]問10. (β,1−α)のグラフ

(B～Cランク)

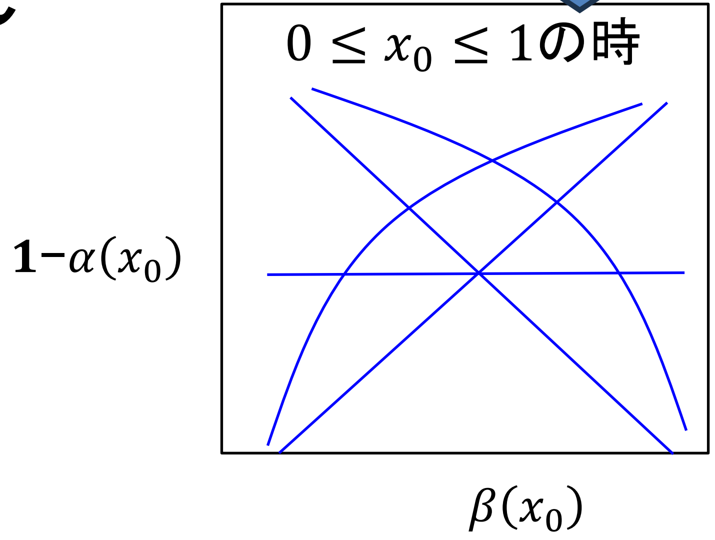




↓馴染みが無い方にも後で説明します

第１種の過誤の確率：α

第2種の過誤の確率：β



(準備)
まずこれを
説明します

既にご存知
の方は、
(p123.3)～
へどうぞ

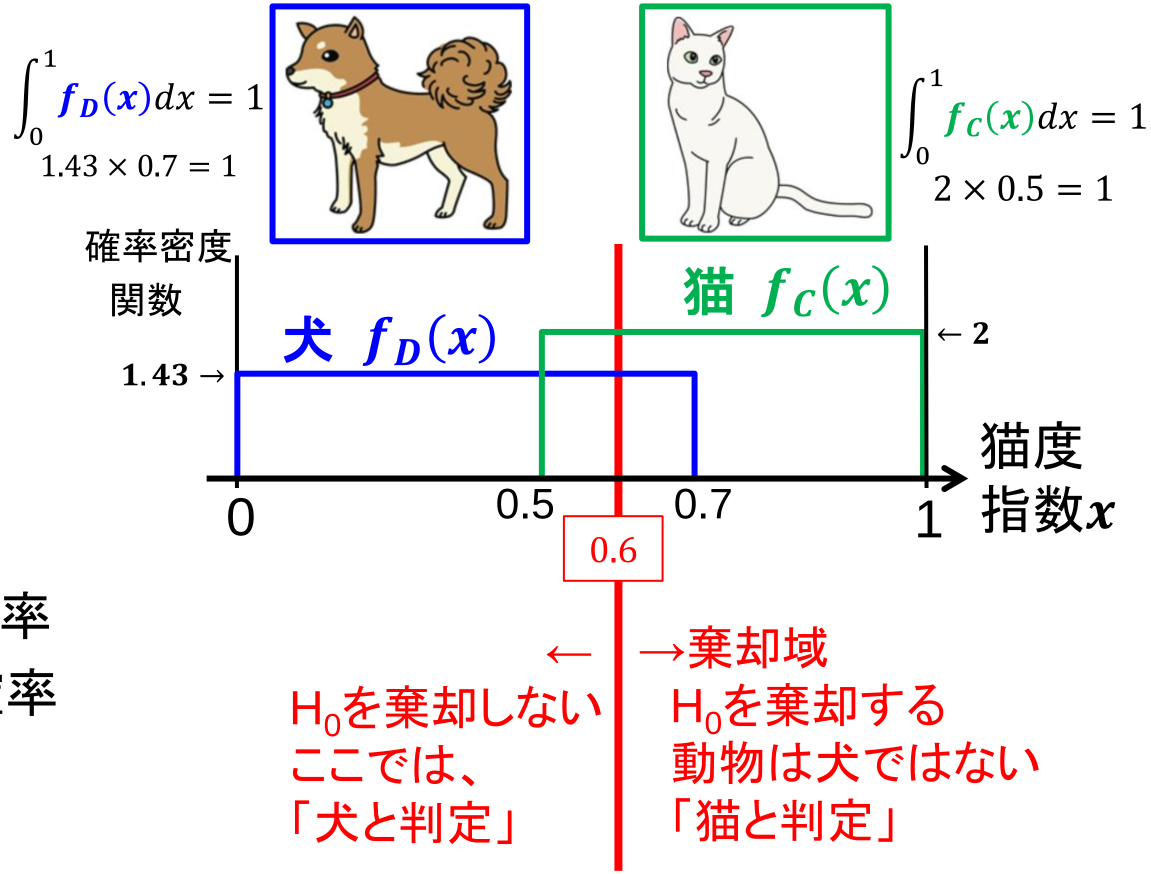
(p123.2a) [C8]問10.(準備)第1種、第２種の過誤、検出力

(例)動物(犬または猫)が写った写真から、「犬」と「猫」を判別するシステムがあります。

写真に写った動物（犬または猫）のパーツ・特徴(耳、目、ひげ、前脚、胴体、後脚、尻尾、毛並み、大きさ、色など)から、「猫度指数」を算出します。猫の「猫度指数」は大きく、犬の「猫度指数」は小さいです。

帰無仮説(H_0): 写真の動物は犬である
対立仮説(H_1): 写真の動物は猫である　　を考えます

「猫」、「犬」の写真に基づく「猫度指数」の分布は
右の通り(連続型一様分布)だったと仮定します。
帰無仮説(H_0)の棄却域を
$x \geq 0.6$ とした時に、



(1)犬を猫と誤判定してしまう確率は？　⇔第1種の過誤の確率
(2)猫を犬と誤判定してしまう確率は？　⇔第2種の過誤の確率
(3)猫を猫と正しく判定する確率は？　⇔検出力

(p123.2b) [C8]問10.(準備)第1種、第２種の過誤、検出力

帰無仮説(H_0):
写真の動物は犬である

対立仮説(H_1):
写真の動物は猫である

(1)犬を猫と誤判定してしまう確率は？

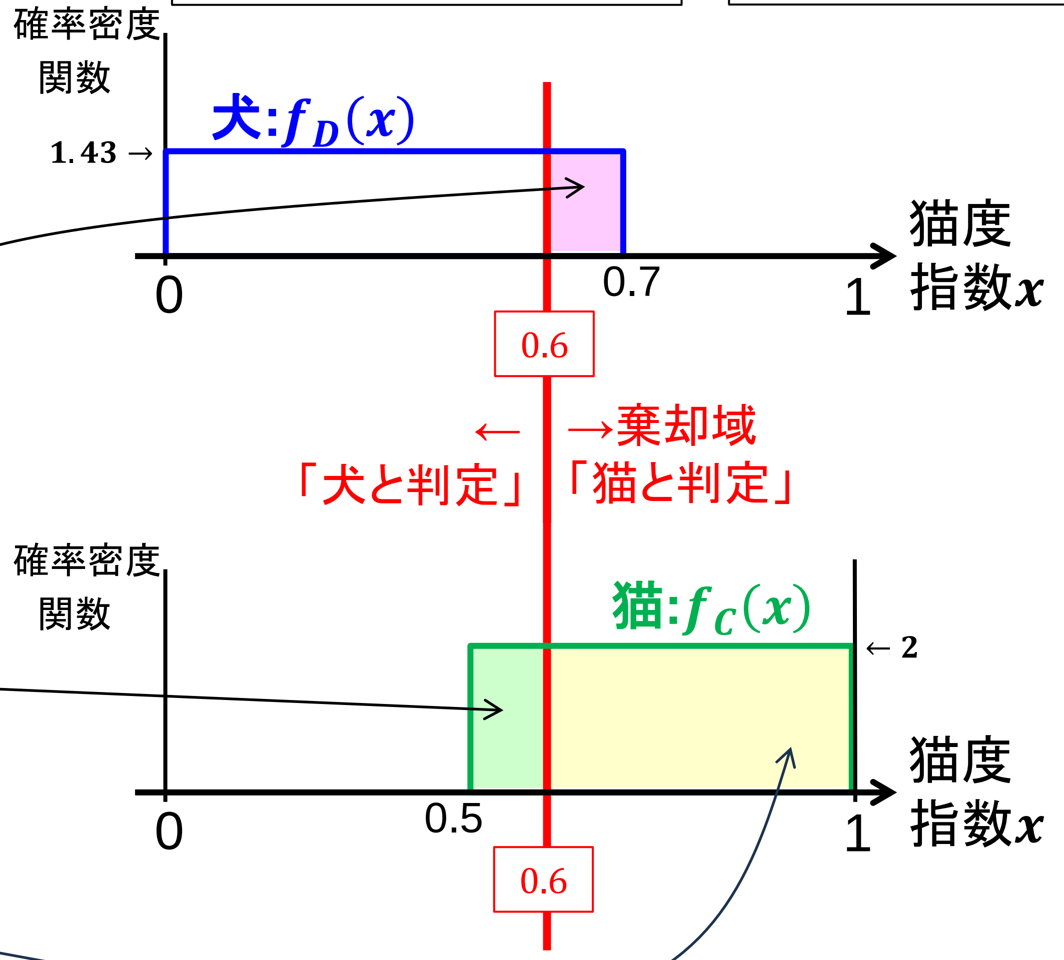
第1種の過誤
あ(A)わて者の誤り

Q1:どの部分の確率を求めたらいいでしょう？

⇒右図の

Q2:確率はいくらでしょう？

$$\alpha = 1.43 \times 0.1 = 0.143$$



(2)猫を犬と誤判定してしまう確率は？

第2種の過誤
ぼ(Bo)んやり者の誤り

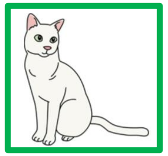
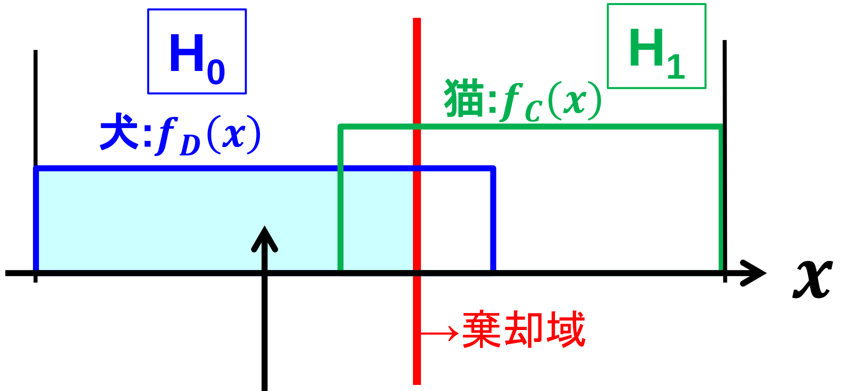
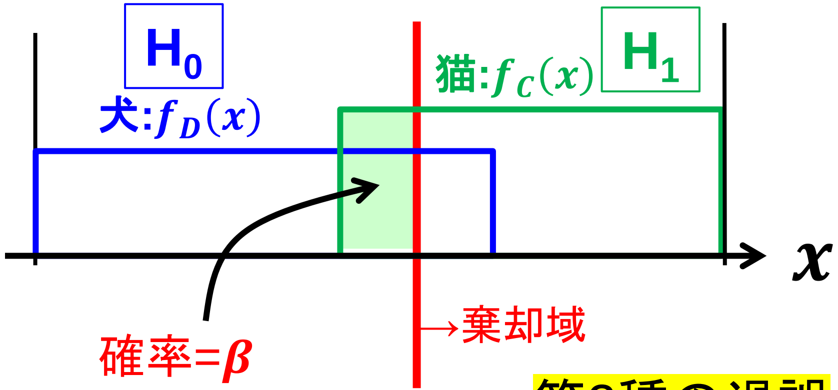
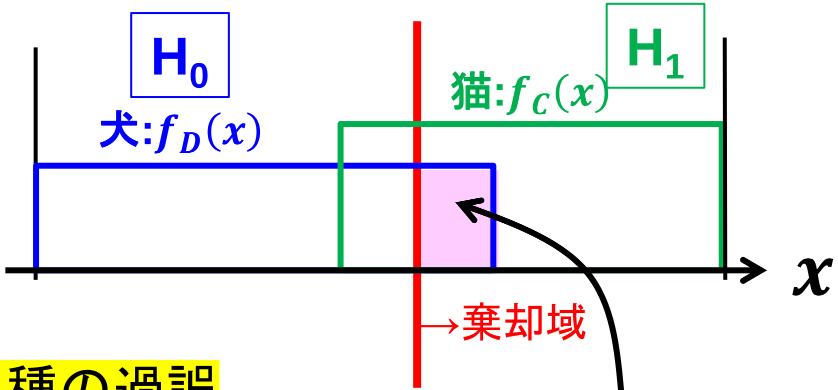
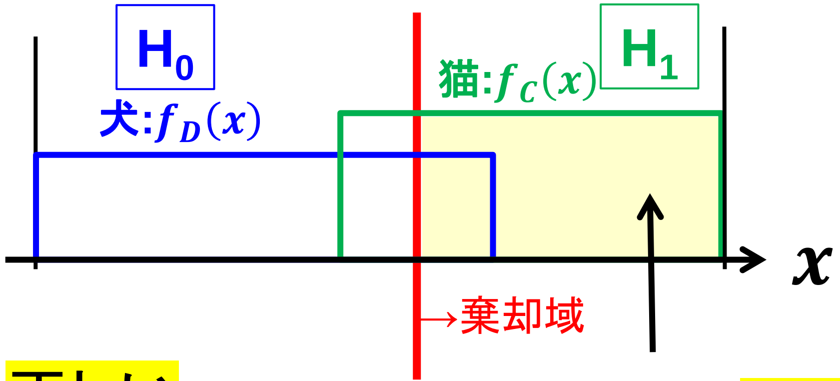
$$\beta = 2 \times 0.1 = 0.20$$

(3)猫を猫と正しく判定する確率は？

検出力

$$1 - \beta = 2 \times 0.4 = 0.80$$

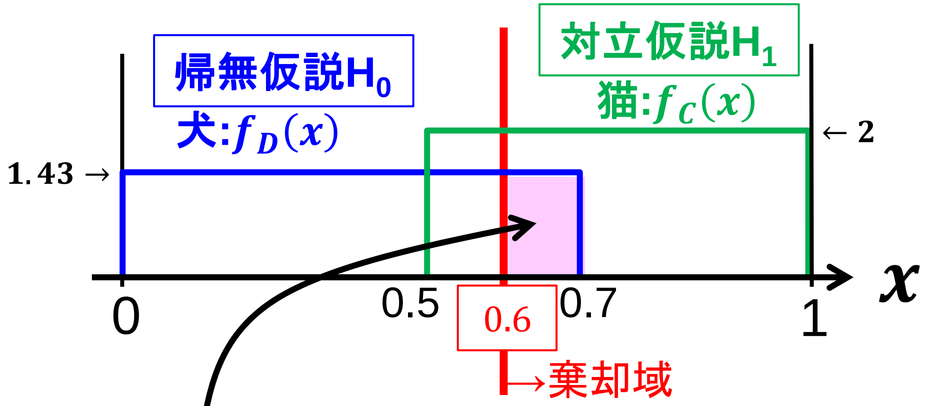
(p123.2c) [C8]問10.(準備)第1種、第２種の過誤、検出力

		 H_0:帰無仮説 H_0が成立(犬である)	事実	H_1:対立仮説 H_1が成立(猫である) 
検定結果	H_0が正しい 犬と判定される	 確率=1 − α 正しい		 確率=β 第2種の過誤（ぼんやり者の誤り）
	H_1が正しい 猫と判定される	 第1種の過誤（慌て者の誤り） 確率=α: 有意水準		 正しい 確率= 1 − β: 検出力

(p123.2d) [C8]問10.(準備)第1種、第２種の過誤、検出力

Q: 分布が､｢一様分布｣でなく､
｢正規分布｣の場合､
第１種､第2種の過誤の確率､検出力は
計算できる？

⇒計算できます！



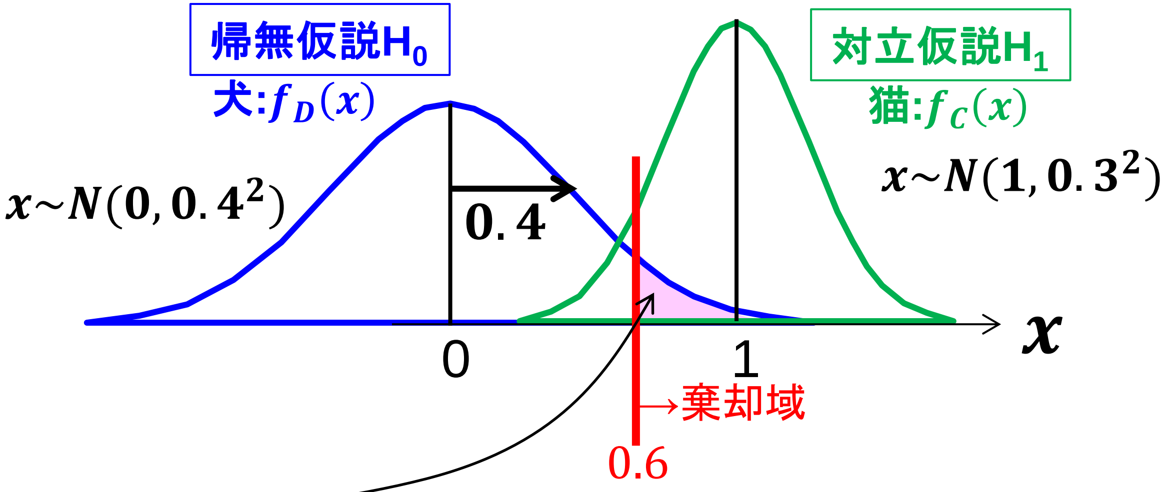
$\alpha = 1.43 \times 0.1 = 0.143$

帰無仮説(H_0): 写真の動物は犬である
⇒　(例)$x \sim N(0, 0.4^2)$　の場合を考えます
(例)第1種の過誤(慌て者の誤り)の場合:

$\alpha = Pr(x \geq 0.6)$

$= Pr\left(z \geq \frac{0.6}{0.4} = 1.5\right) = 0.0668$

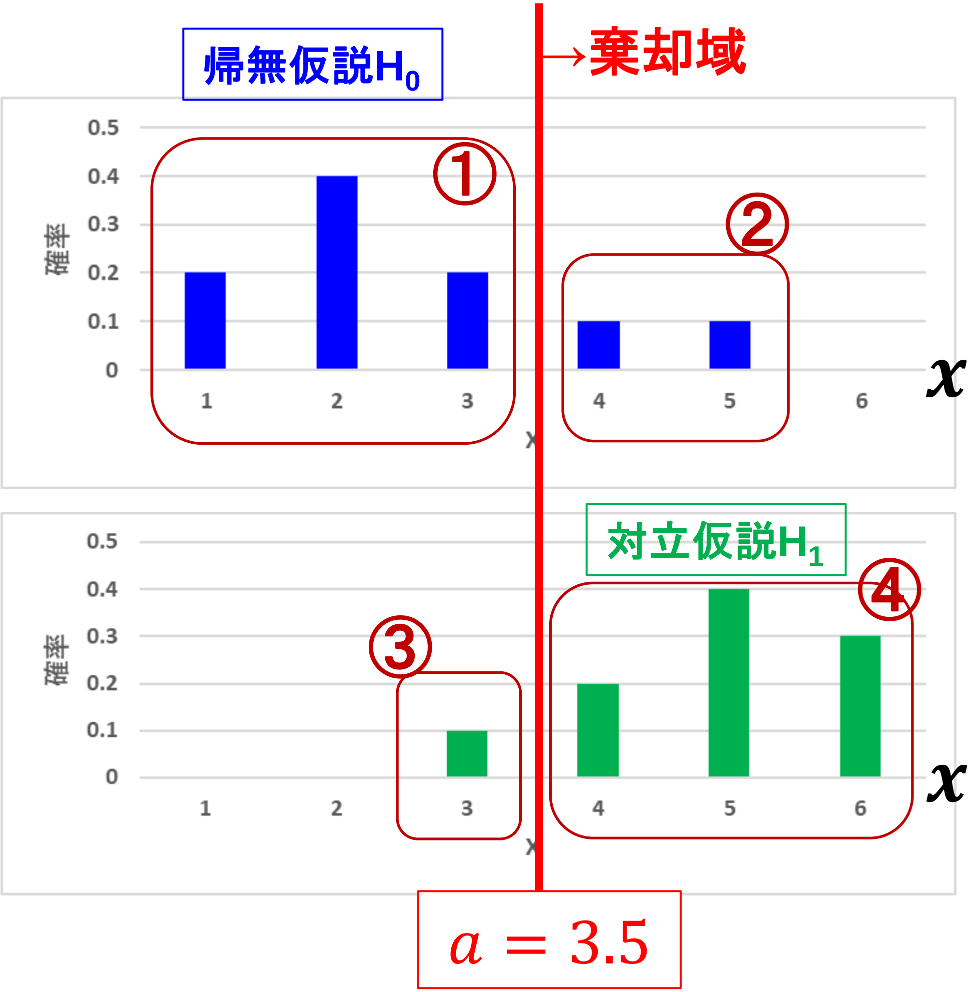
(解説) $x \sim N(0, 0.4^2)$　より、標準化: $z = \frac{x}{0.4} \sim N(0, 1)$すると
正規分布表より確率が求まります



(p123.2e) [C8]問10.(準備)第1種、第２種の過誤、検出力

Q. 連続分布でなく、離散分布の場合は、計算できる？　⇒計算できます！

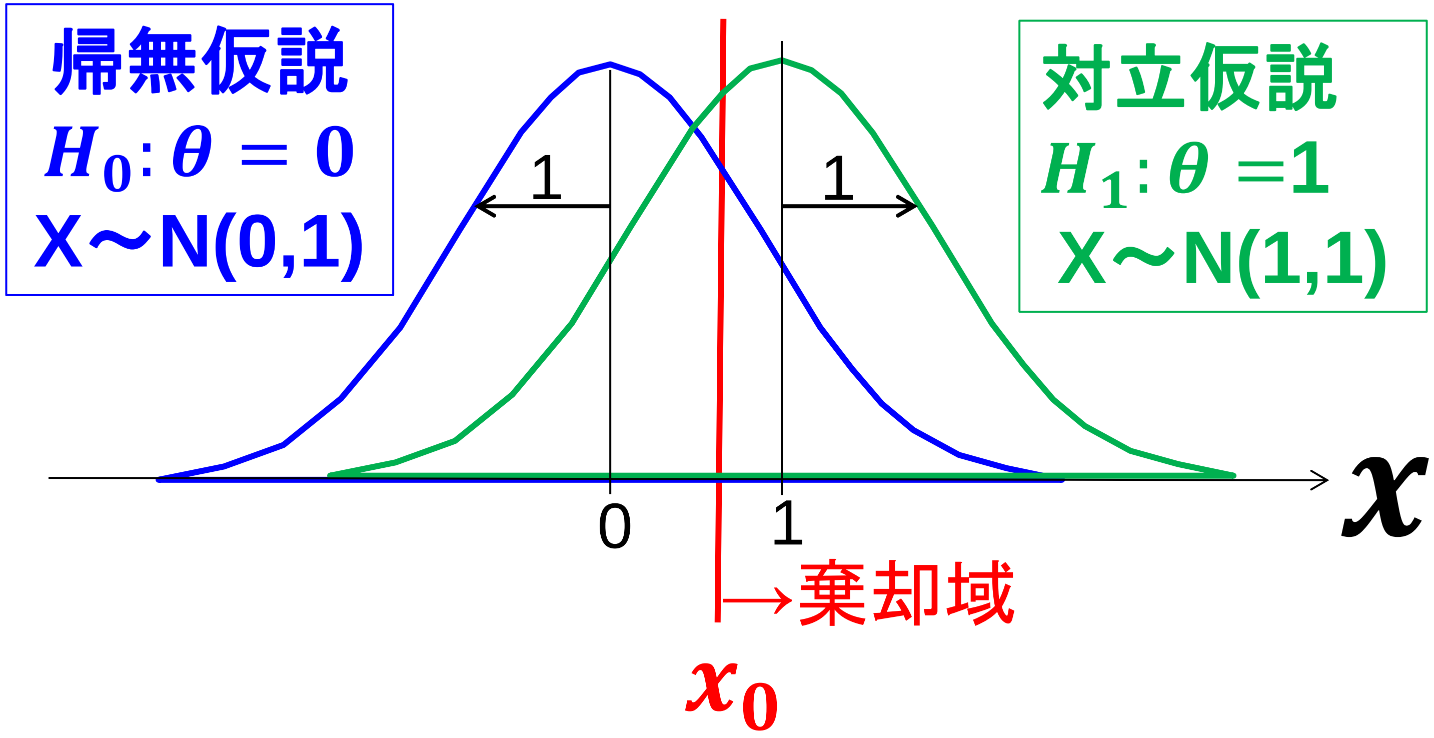
(例)出題例:2018年6月問13



		H_0が成立	事実	H_1が成立
検定結果	H_0が正しい	① 正しい 確率$= 1 - \alpha = 0.8$		③ 第2種の過誤（ぼんやり者の誤り） 確率$= \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0.1}$
	H_1が正しい	② 第1種の過誤（慌て者の誤り） 確率$= \alpha = 0.2$		④ 正しい 確率$= \mathbf{1} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0.9}$ ：検出力

(p123.3)[C8]問10. $(\beta, 1-\alpha)$のグラフ

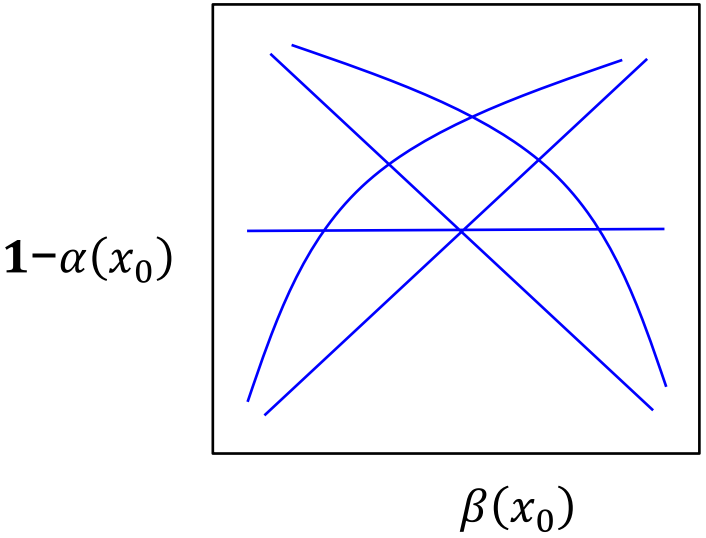
(B～Cランク)



第1種の過誤の確率：$\alpha(x_0)$

第2種の過誤の確率：$\beta(x_0)$

$0 \le x_0 \le 1$の時、



関係は、どうなる？

・横軸：β

・縦軸：$1-\alpha$

上の図で、

Q1: α に相当する領域はどこでしょう？

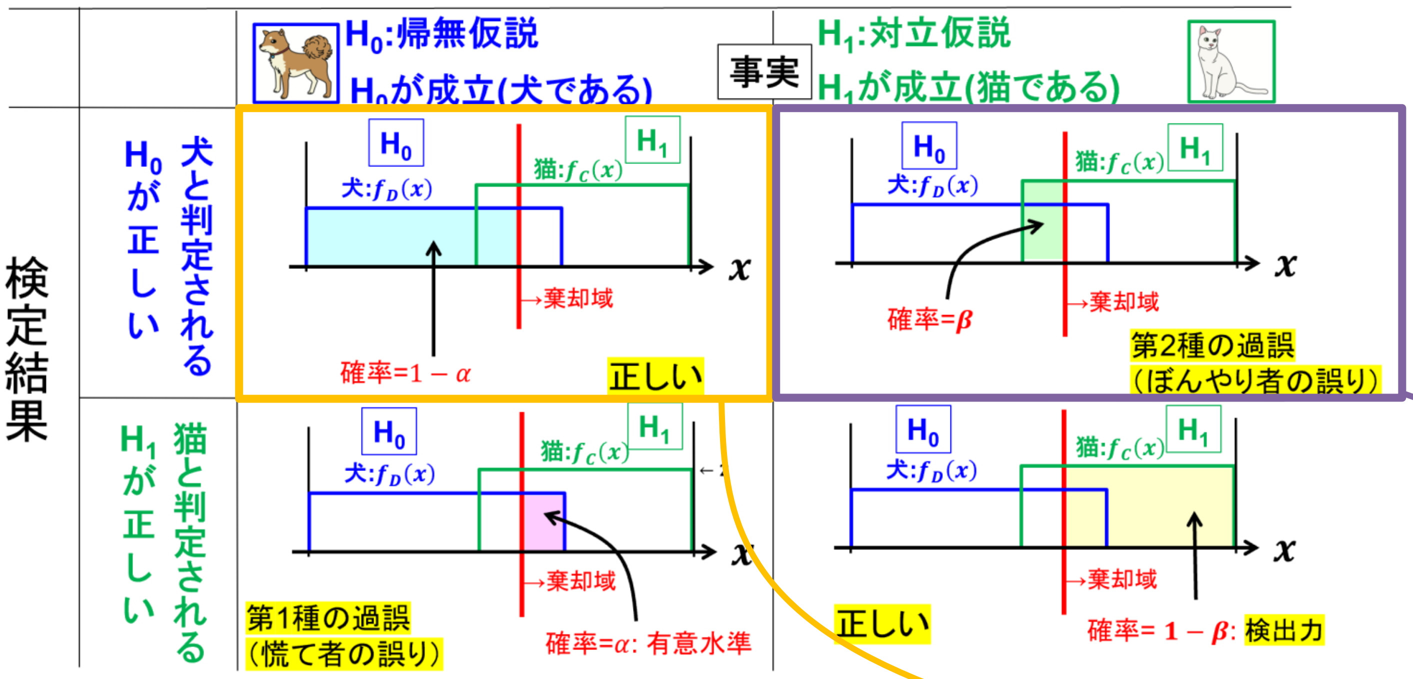
Q2: $1-\alpha$ に相当する領域はどこでしょう？

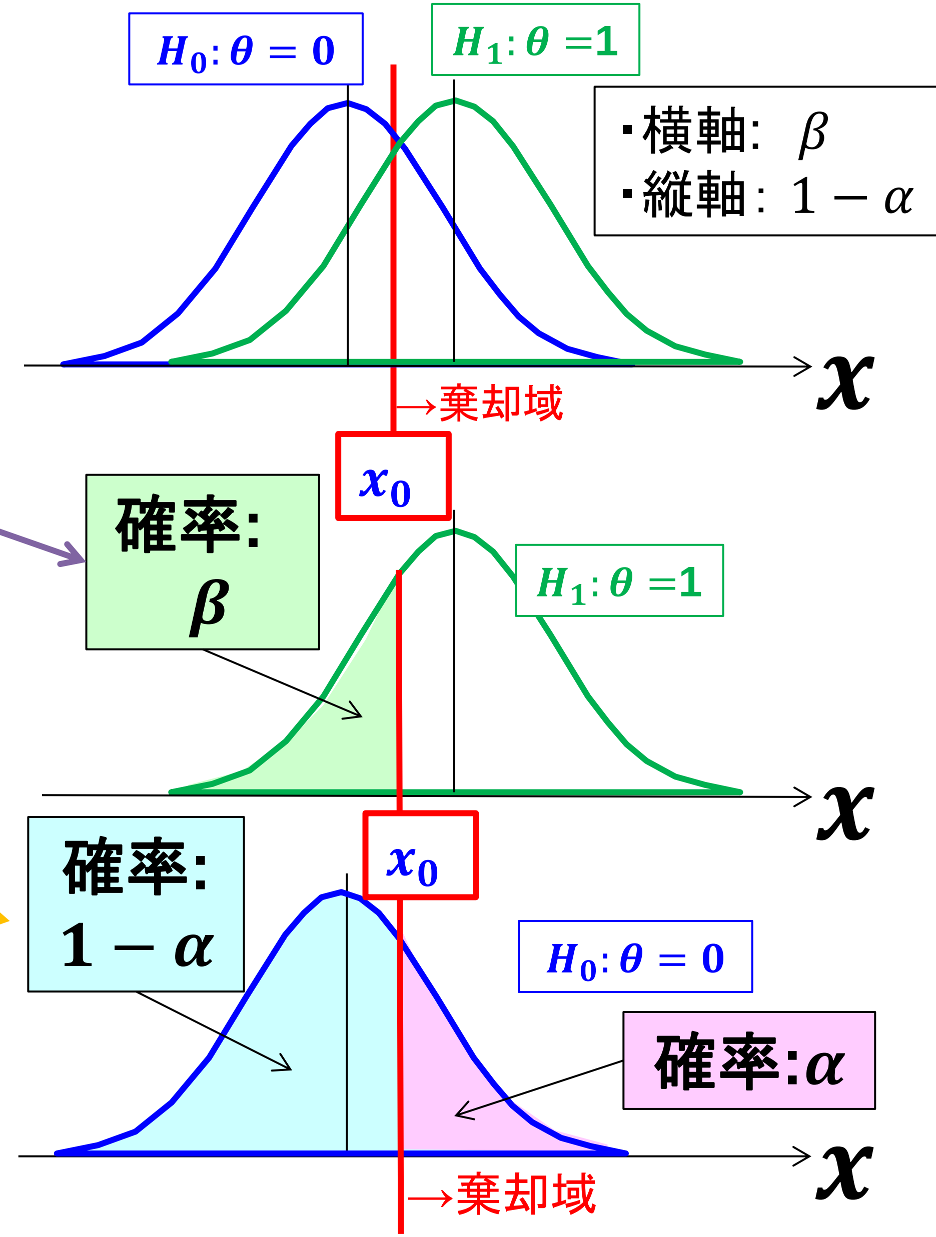
Q3: β に相当する領域はどこでしょう？

↑その面積＝確率

(p123.4)[C8]問10. $(\beta, 1-\alpha)$のグラフ

(B〜Cランク)





・β　　　に相当する領域はどこでしょう？

・α　　　に相当する領域はどこでしょう？

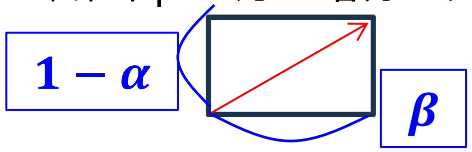
・$1-\alpha$　に相当する領域はどこでしょう？

(p123.5)[C8]問10. $(\beta, 1-\alpha)$のグラフ

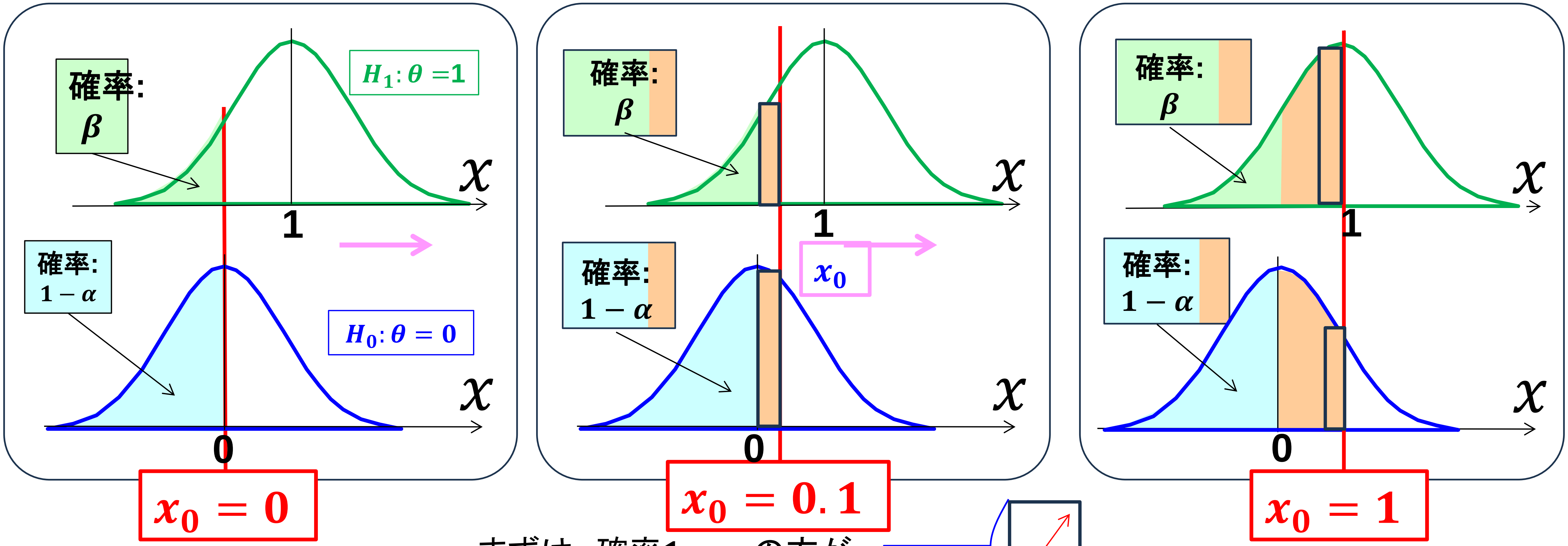
(B～Cランク)

$x_0(0 \to 1)$の増大と共に

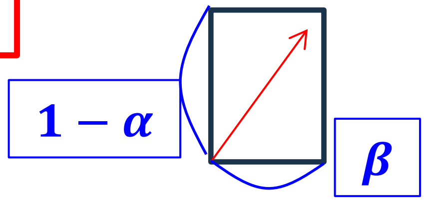
$x_0 = 1$付近では、確率β の方が増分が大きい



確率$1-\alpha$
確率β
共に増加する　⇒答の候補は①②のみ

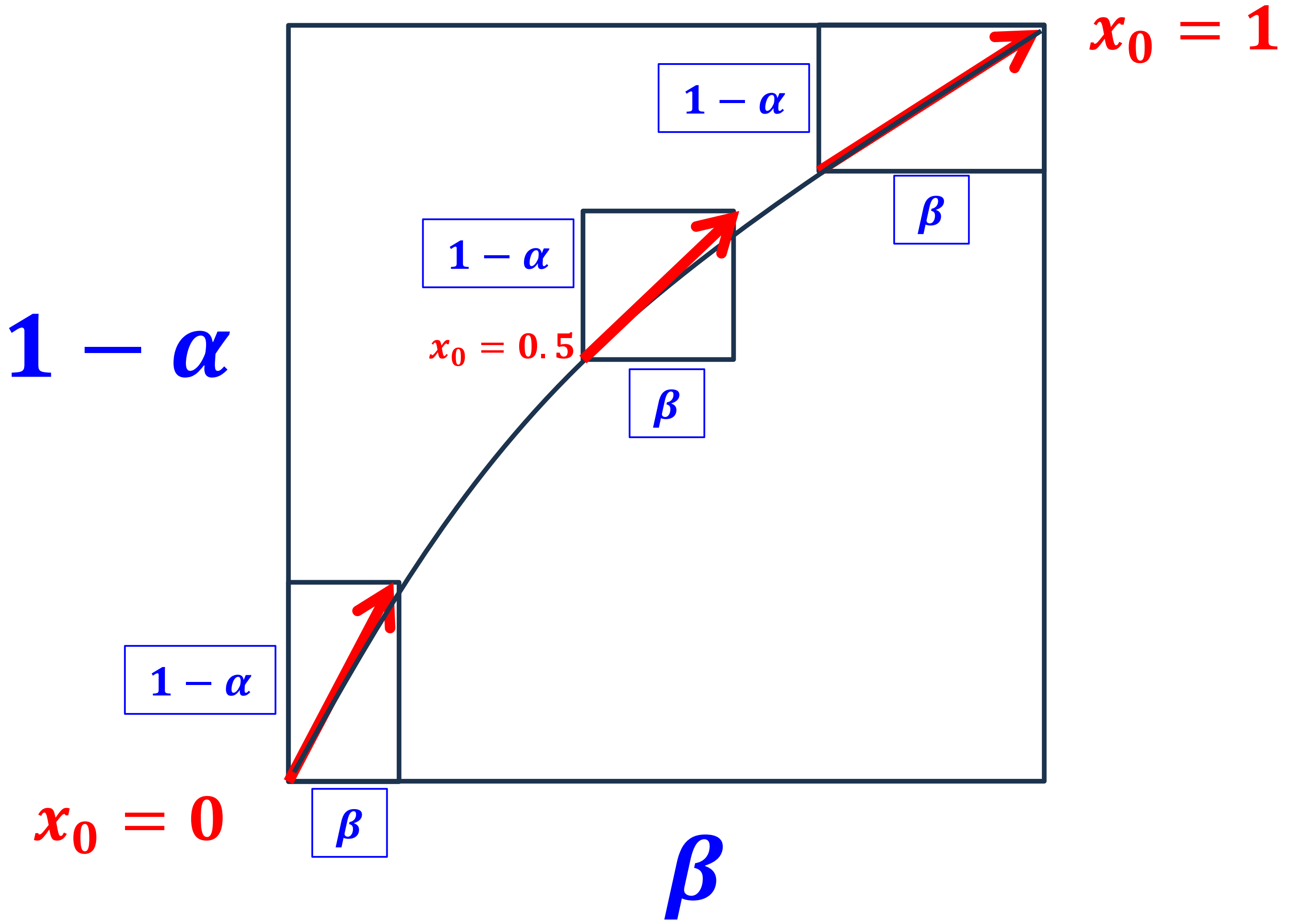


まずは、確率$1-\alpha$ の方が
増分が大きい



(p123.6)[C8]問10. $(\beta, 1-\alpha)$のグラフ

(B～Cランク)



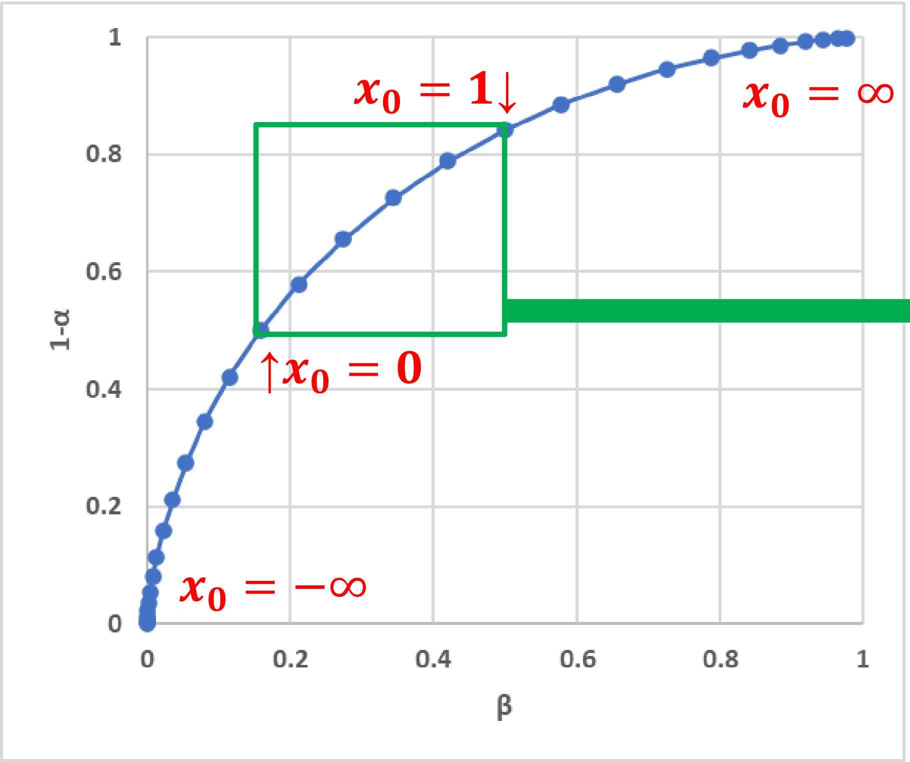
⇒答:①

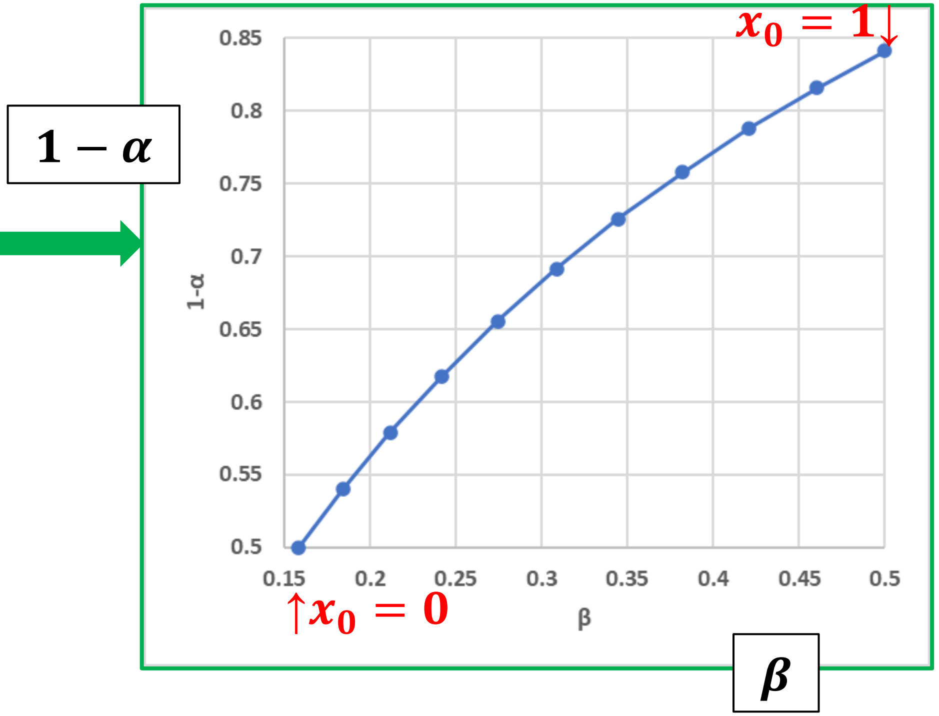
済

(p123.7)[C8]問10. $(\beta, 1-\alpha)$のグラフ

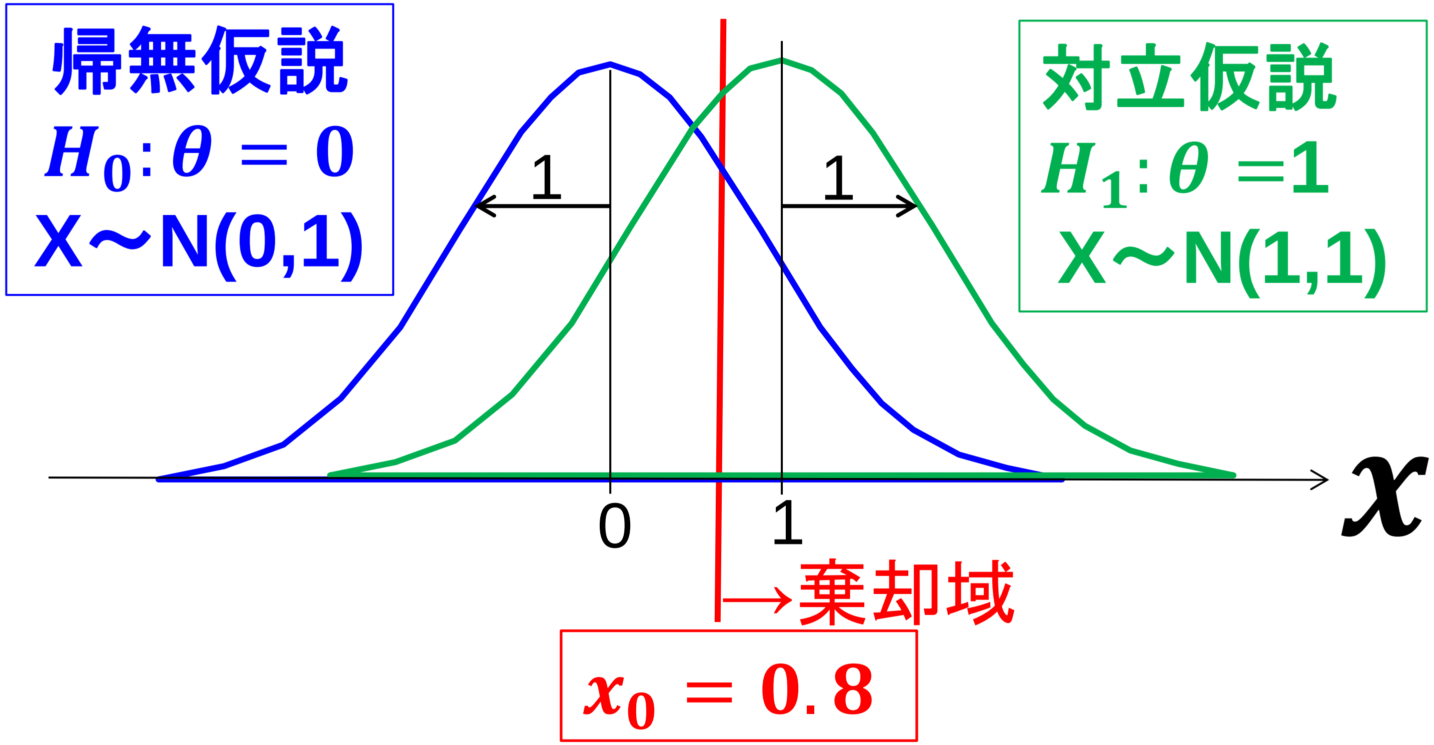
(B～Cランク)

(ご参考)実際にエクセルを使うと、
x_0に対して、確率$1-\alpha$、確率βの計算をすることができます





(p123.8a)[C8]問10.(練習問題)p184問13

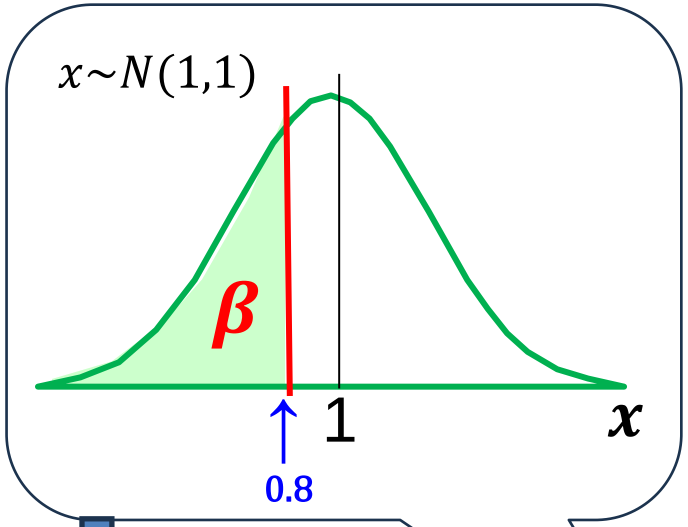


第１種の過誤の確率：α

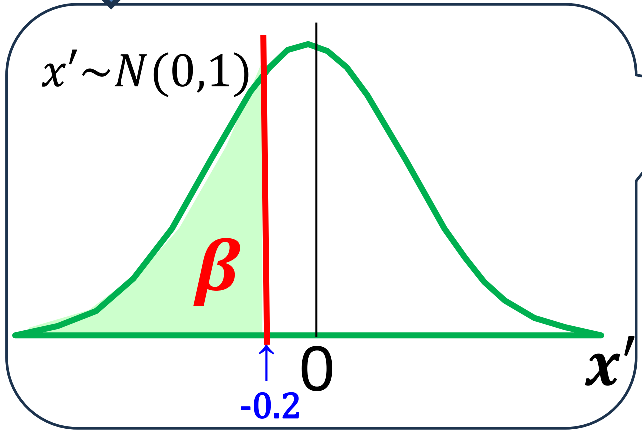
第2種の過誤の確率：β

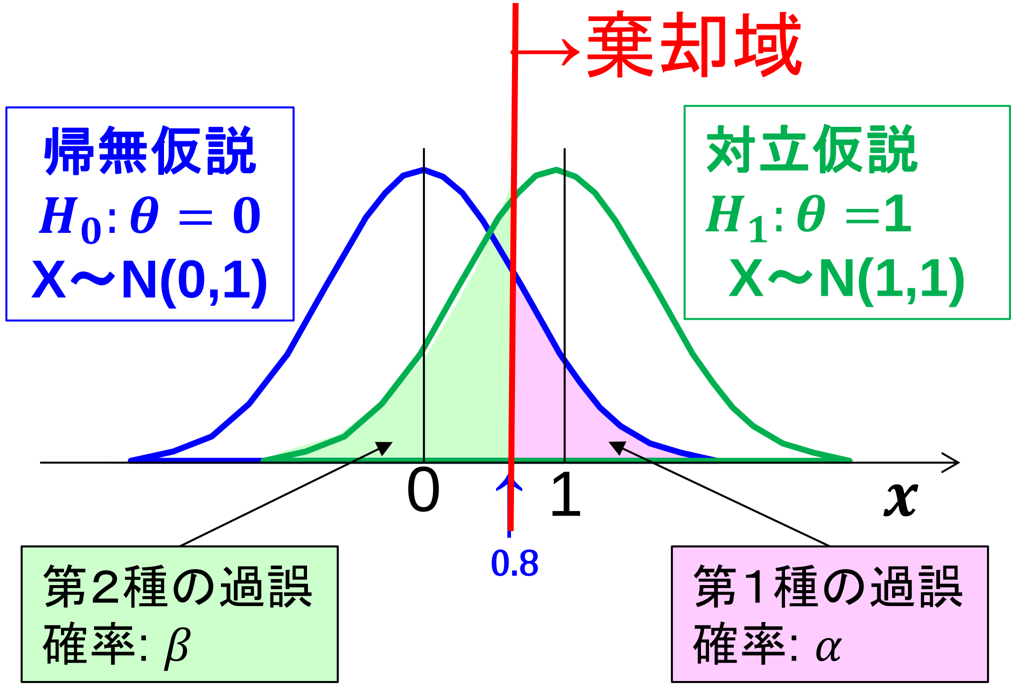
はいくらですか？

(p123.8b)[C8]問10.(練習問題)p184問13



$x' = x - 1$





$x \sim N(1,1)$で$P(x < 0.8)$

$x' = x - 1 \sim N(0,1)$で

$P(x < 0.8) = P(x' < -0.2)$

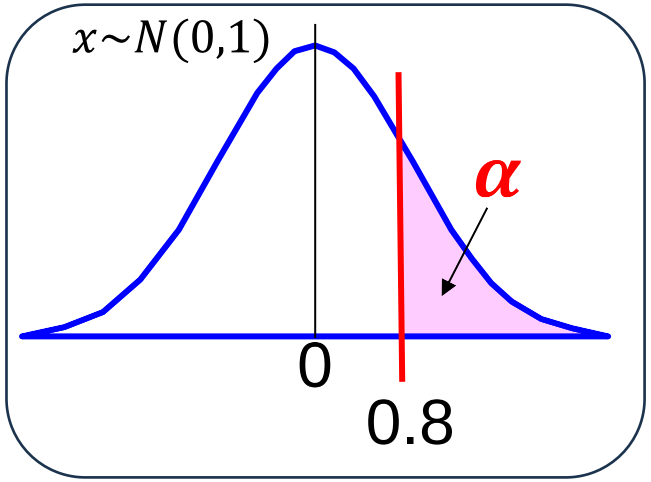
$= P(x' > 0.2) = 0.4207$

$\boldsymbol{\beta} = 0.4207$

$x \sim N(0,1)$で

$P(x > 0.8) = 0.2119$

$\boldsymbol{\alpha} = 0.2119$



(別解)
図より明らかに
$\alpha < \beta < 0.5$
①～⑤で
この条件を満たすのは、
②のみ