ひかり統計塾

統計検定２級
公式問題集(CBT対応版)の解説
カテゴリー6 (p78-93)

標本分布の分野

統計検定2級　CBT問題集　PART.2 目次

[C6]
[CATEGORY.6]
標本分布の分野

(p78.1) [C6]問1. 標本割合$\hat{p}$の標本分布

(A～Bランク)

関連問題:p72,問4
p74,問5

(例)選挙の出口調査

母比率:p

A氏の母集団全体での得票率:p

母集団

A	B	A	A	A
B	A	A	B	A
A	A	B	A	B
B	B	A	B	A
A	A	B	A	A
B	A	B	A	B
A	B	A	B	A
B	A	B	A	A
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・

出口調査で
100人抽出

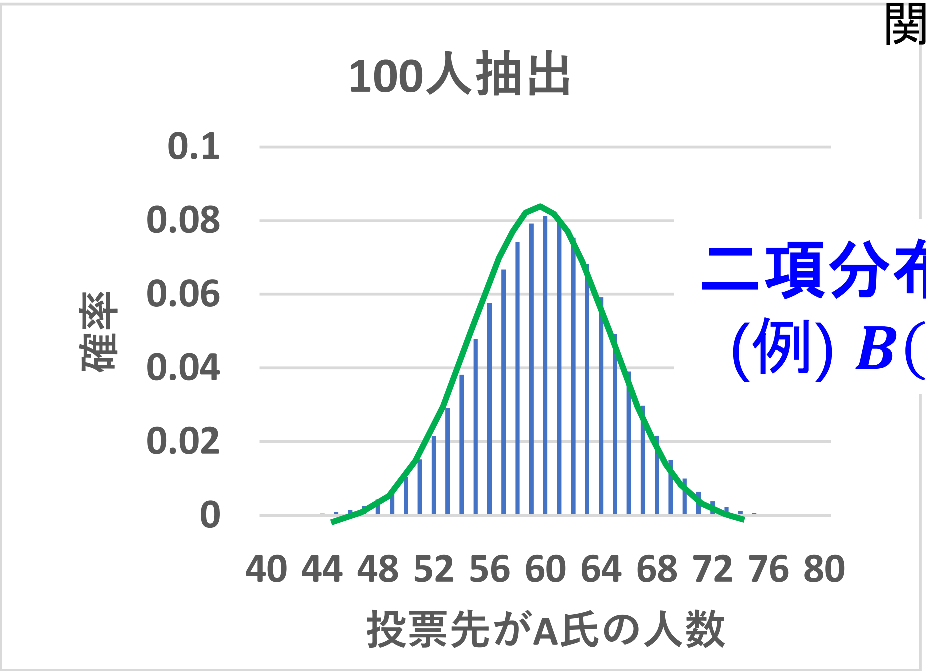
推測

標本

A	B	A	A	A
B	A	B	A	B

標本比率:$\hat{p}$

標本の大きさ:n (例:$n = 100$)
A氏に54人が投票 $\hat{p} = \frac{54}{100} = 0.54$
(標本(n人)中、A氏に投票した人数をXとする)



二項分布:$B(n, p)$
(例) $B(100, 0.6)$

A氏に投票した人数X

二項分布: $X \sim B(n, p)$

正規分布: $X \sim N(np, np(1-p))$

A氏の標本得票率:

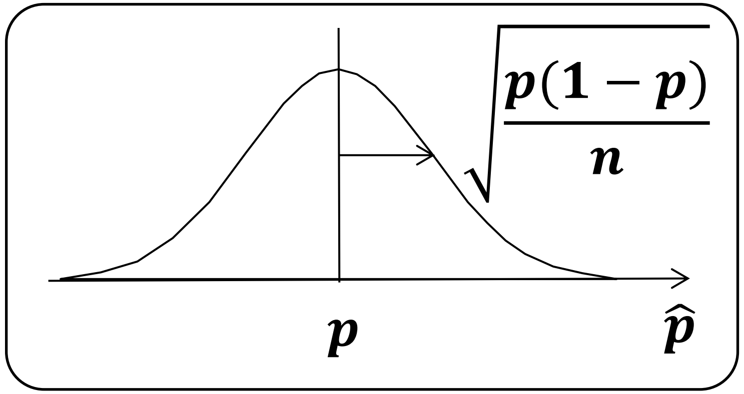
$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

(p78.2)[C6]問1. 標本割合$\hat{p}$の標本分布

(A～Bランク)

標本得票率：
$\hat{p}$は正規分布
に従う

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$



(注)テキストに間違いあり
（初版第3刷まで？）
（誤）$1.96 \leq (ア) \leq 1.96$
ではなく
(正)$-1.96 \leq (ア) \leq 1.96$

(公式)$X \sim N(\mu, \sigma^2)$)の時、
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$と変換すると、
$Z \sim N(0,1)$となる

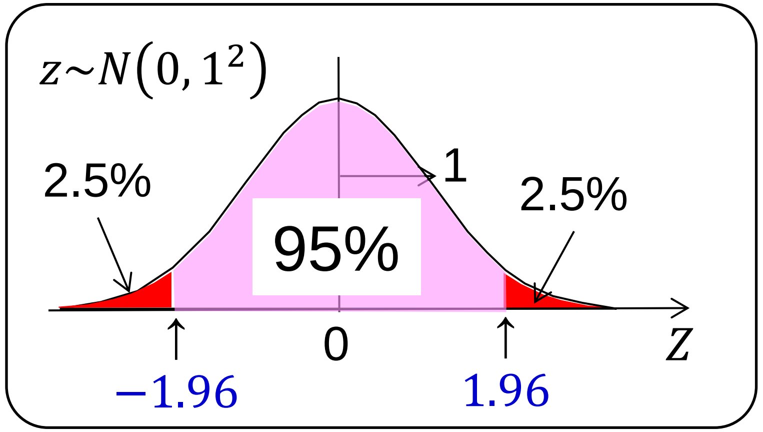
$\hat{p}$を標準化する

$$Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$(ア) = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

注

②または③



95%の確率で、$-1.96 \leq Z \leq 1.96$

$$-1.96 \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 1.96$$

nが大きくなると、
標本⇒母集団に近づく
推定の精度が良くなる
$p \fallingdotseq \hat{p}$
①(イ)、④(イ)はおかしい

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$(イ) = 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

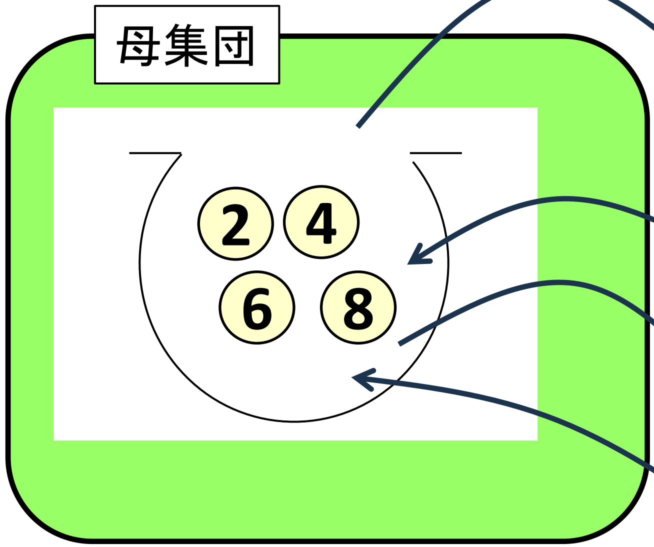
③または⑤

(答)③

済

(p80.1)[C6]問2. 標本分布の中央値等

(A～Bランク)



例

? 1個目とりだす値を X_1とする

玉を戻す（復元）

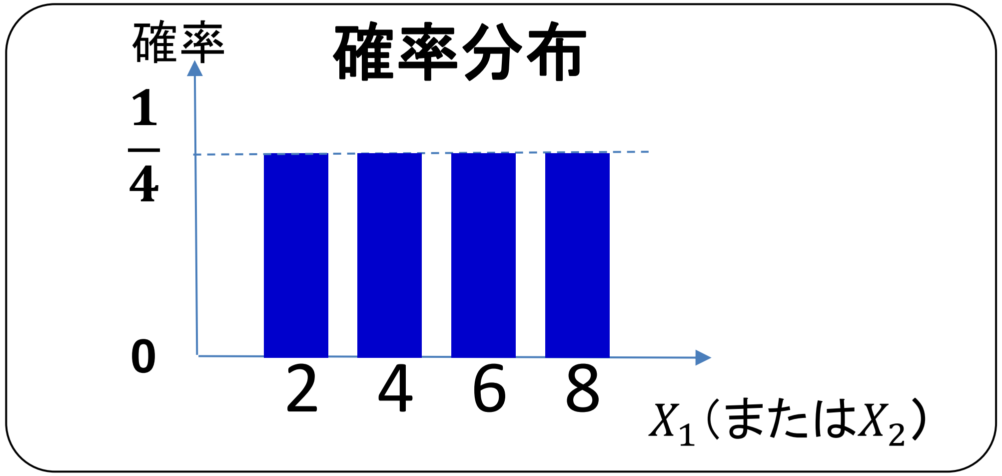
? 2個目とりだす値を X_2とする

玉を戻す

X_1, X_2は独立

$\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$ を計算

中央値、最頻値?



標本

(例) 8 4 $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2} = 6$

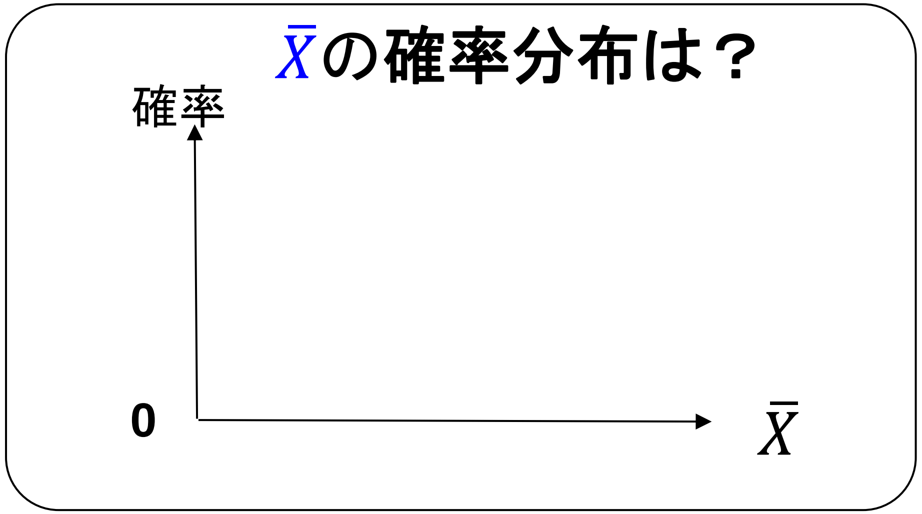
他の標本の例

2 2 $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2} = 2$

4 6 $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2} = 5$

8 2 $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2} = 5$

…



⇒確率分布(標本分布)がわかれば中央値・最頻値がわかる

(p80.2)[C6]問2. 標本分布の中央値等

(A～Bランク)

$\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$ の値は･･･

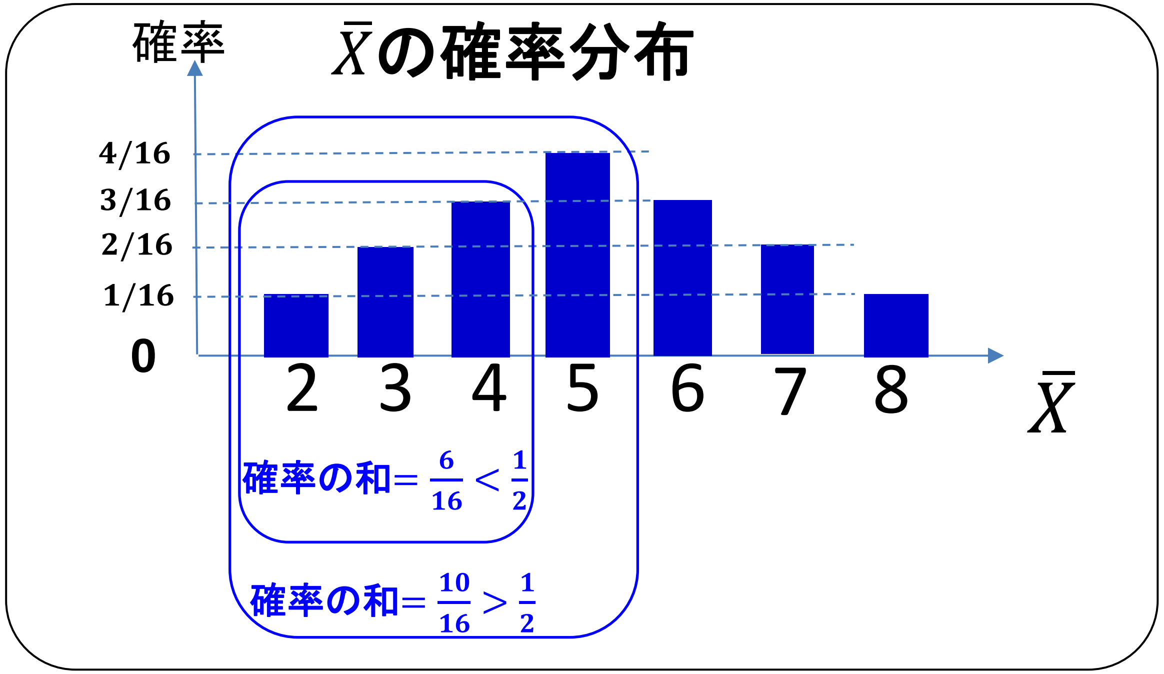
等確率(1/4)

X_1 \ X_2	2	4	6	8
2	2	3	4	5
4	3	4	5	6
6	4	5	6	7
8	5	6	7	8

等確率(1/4)

$\bar{X} = 5$となる確率 $= \dfrac{4}{16}$

$\bar{X} = 7$となる確率 $= \dfrac{2}{16}$



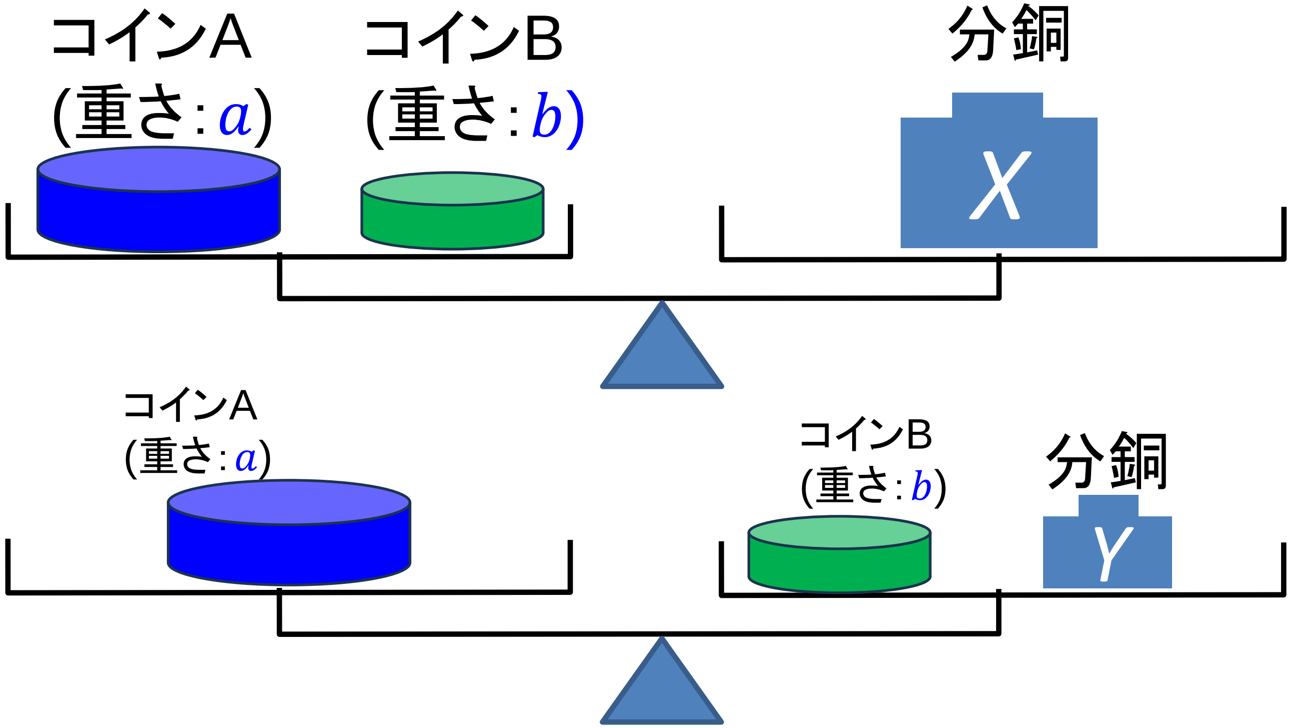
中央値＝5
最頻値＝5

(答)③

済

(p82.1)[C6]問3. 推定量の分散

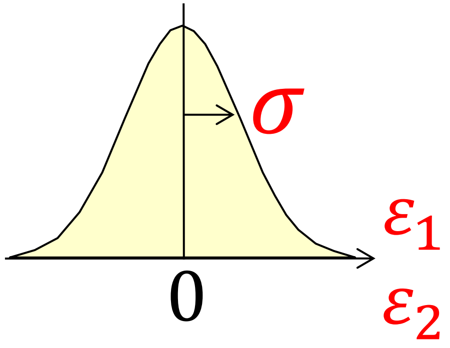
(Bランク)



重さa, bは未知⇒ X,Yから求める(推定する)

誤差が　有る時

$$X = a + b + \varepsilon_1$$



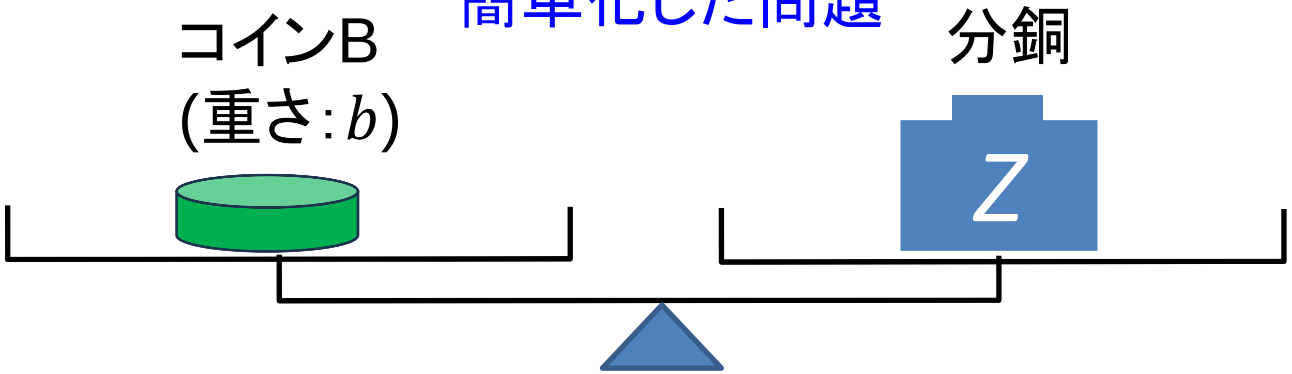
$$Y = a - b + \varepsilon_2$$

$$\frac{X - Y}{2} = b + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

Q: コインBの重さの推定量の分散は？

(p82.2)[C6]問3. 推定量の分散

簡単化した問題



・両側天秤ばかりで、コインBの重さを量る
・コインBの重さはbで、未知とする
・重さを量った時の計測値はZ

・ Zは誤差ε_0を含むとする:

$$Z = b + \varepsilon_0$$

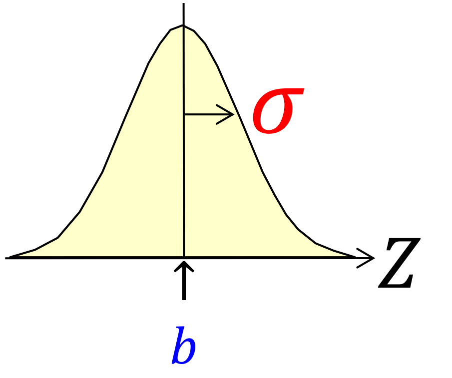
・ ε_0は、平均0,分散σ^2でばらつくとする

Q: Bの重さ(b)の推定量　Z　の分散はいくら？

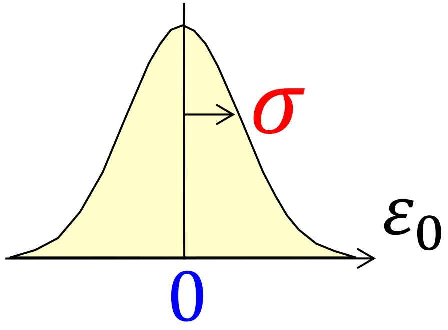
確率変数

$$Z = b + \varepsilon_0$$

$E[Z] = b$
$V[Z] = \sigma^2$



$E[\varepsilon_0] = 0$
$V[\varepsilon_0] = \sigma^2$



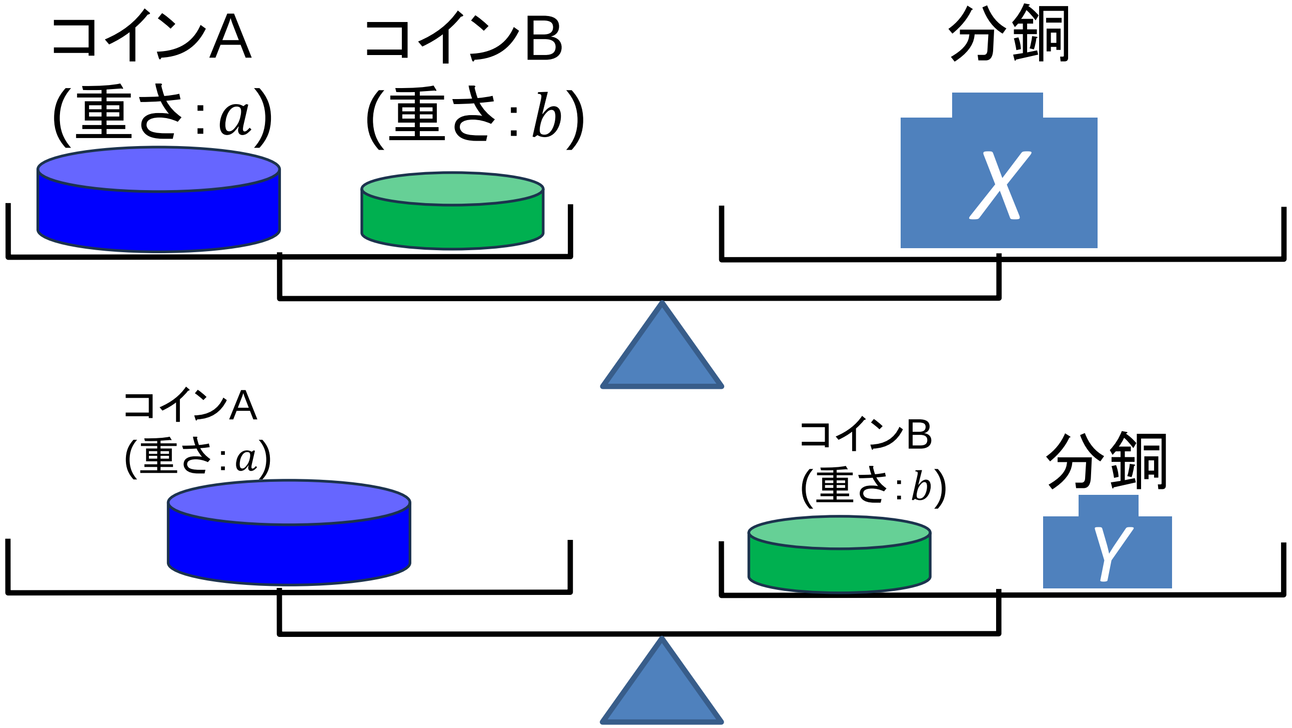
例:b=7.00g (500円玉相当)、$\sigma = 0.05g$とした時、

	b	Z	ε_0
1回目	7.00	7.08	0.08
2回目	7.00	6.96	-0.04
3回目	7.00	7.03	0.03
・・・	・・・	・・・	・・・

(答)
$V[Z] = \sigma^2$

(p82.3)[C6]問3. 推定量の分散

(Bランク)



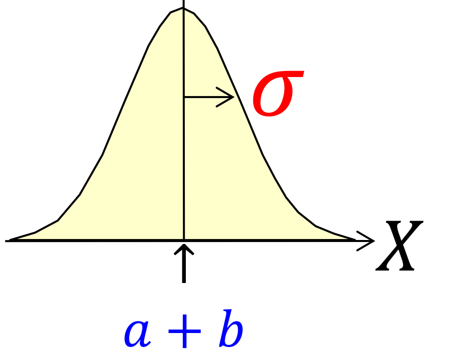
誤差がある時

確率変数

$$X = a + b + \varepsilon_1$$

$E[X] = a + b$

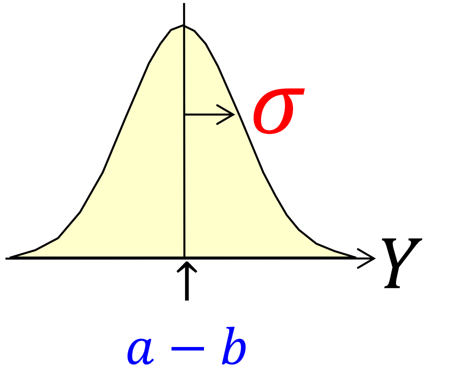
$V[X] = \sigma^2$



$$Y = a - b + \varepsilon_2$$

$E[Y] = a - b$

$V[Y] = \sigma^2$



誤差がなければ、$b = \dfrac{X - Y}{2}$ で重さが得られる。

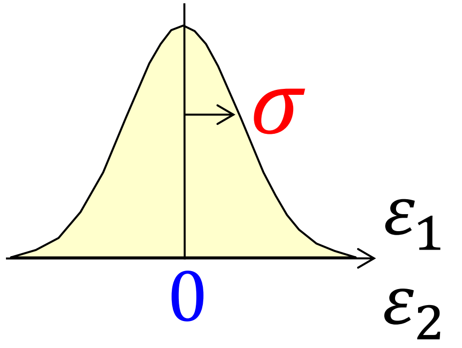
コインBの重さの推定量

Q: 誤差がある時、$\dfrac{X - Y}{2}$ の分散はどうなるでしょう？

$E[\varepsilon_1] = E[\varepsilon_2] = 0$

$V[\varepsilon_1] = V[\varepsilon_2] = \sigma^2$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$は独立)



(p82.4)[C6]問3. 推定量の分散

(Bランク)

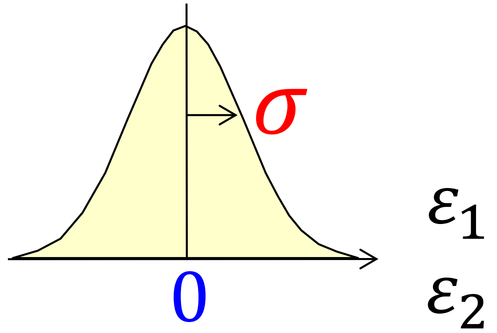
誤差がなければ、$b=\dfrac{X-Y}{2}$ で重さが得られる。
実際には、誤差がある。

$$\frac{X-Y}{2}=\frac{(a+b+\varepsilon_1)-(a-b+\varepsilon_2)}{2}$$
$$=b+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}$$

↓ 確率変数(ばらつく) ↓

$$\boxed{\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}a+b\\a-b\end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{matrix}}$$

↑ 定数(ばらつかない)



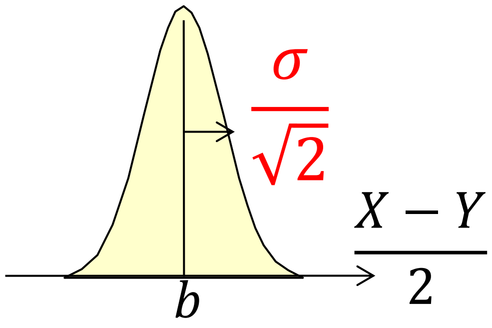
$E[\varepsilon_1]=E[\varepsilon_2]=0$
$V[\varepsilon_1]=V[\varepsilon_2]=\sigma^2$
($\varepsilon_1, \varepsilon_2$は独立)

$$E\left[\frac{X-Y}{2}\right]=b+E\left[\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right]=b$$

(公式)確率変数Xに対して
分散は、$V[aX]=a^2V[X]$

$$V\left[\frac{X-Y}{2}\right]=V\left[\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right]=\frac{1}{4}V[\varepsilon_1-\varepsilon_2]$$
$$=\frac{1}{4}(V[\varepsilon_1]+V[\varepsilon_2])=\frac{1}{4}(\sigma^2+\sigma^2)=\frac{1}{2}\sigma^2$$

(公式)互いに独立な2つの確率変数
XとYの差の分散は、
$$V[X-Y]=V[X]+V[-Y]$$
$$=V[X]+V[Y]$$



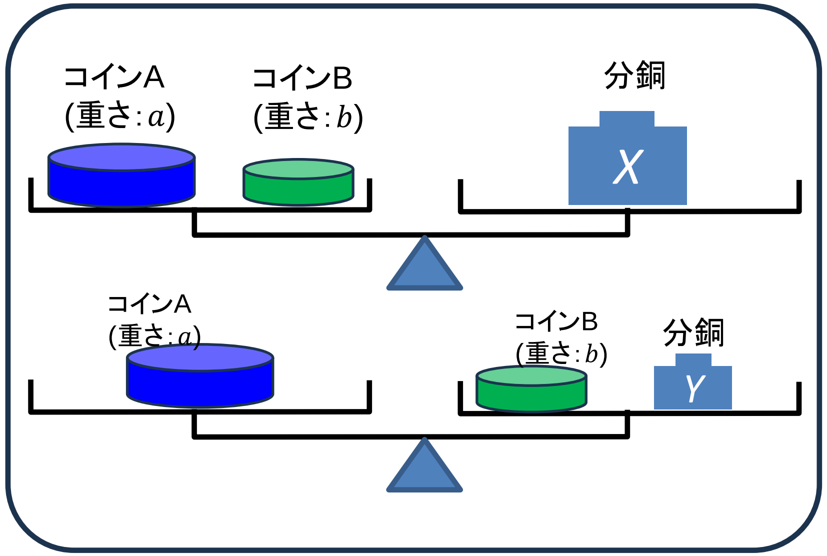
⇒(答)③

済

(p82.5)[C6]問3. (補足)推定量の分散

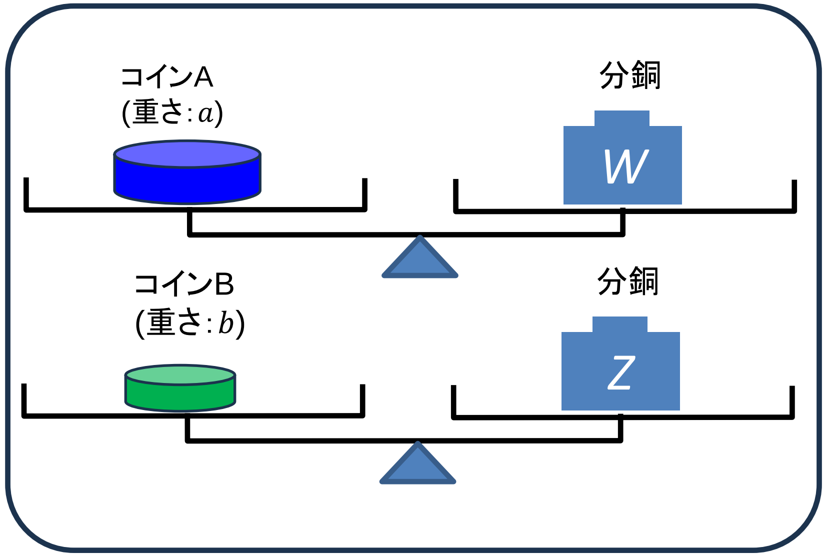
測定方法と精度を比べましょう:　(CBT問題集、p83, 下側の[補足])

「より少ない測定回数で、より多くのコインを精度よく量りたい」

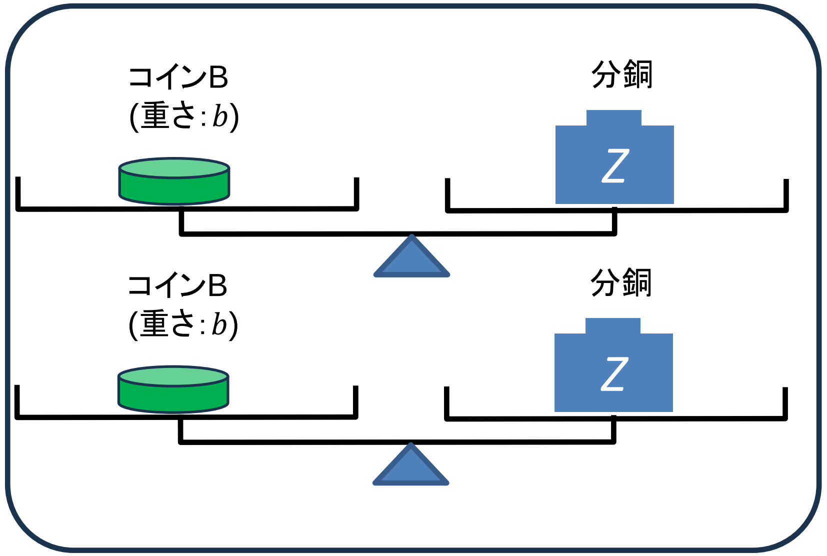


コイン2個
(コインA,コインB)を
分散= $\frac{1}{2}\sigma^2$で
測定する

最もいい



コイン2個
(コインA,コインB)を
分散= σ^2で
測定する



コイン1個
(コインB)を
分散= $\frac{1}{2}\sigma^2$で
測定する

(p84.1)[C6]問4. 和と差の確率変数の性質

(Bランク)

確率変数 X, Yが従う分布・・・

$$X \sim N(0, \sigma_1^2)$$

$$Y \sim N(0, \sigma_2^2)$$

とします。X, Y: 互いに独立です。

確率変数U, V： 以下とします

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y$$

問題で聞かれていること:

I,III ⇒ U, Vの分布の情報

II ⇒ U, V :「独立」について

(公式)

互いに独立な2つの確率変数X, Yが以下の正規分布に従う時、

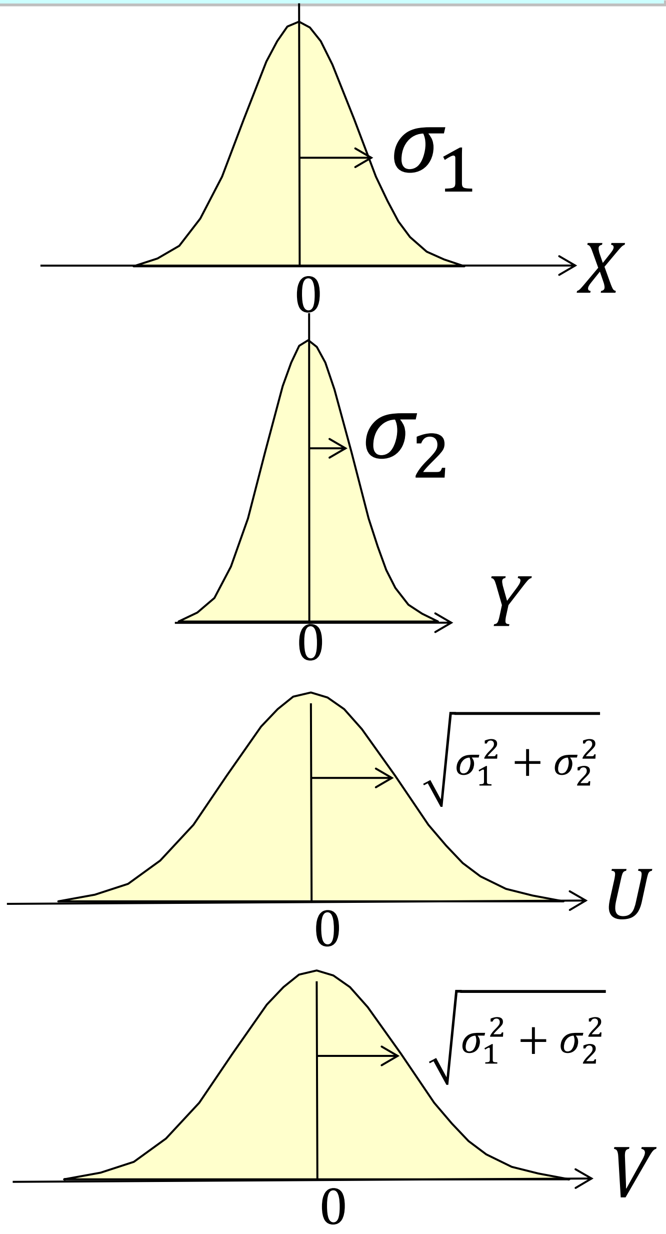
$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

和 $Z = X + Y$は

$$Z \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

差 $W = X - Y$は

$$W \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$



Q: U, Vは、どんな分布に従うでしょう？

公式より、

$$U \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$V \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Q: I,IIIの正誤は？

⇒U, Vは同じ分布に従うので、
IIIは正しい

I: $E[U] = E[V] = 0$ より、正しい

(p84.2)[C6]問4. 和と差の確率変数の性質

(Bランク)

II：U,Vは互いに独立である？独立でない？
⇒何がわかればいい？

U,Vの共分散=0、相関係数=0 ⇔ 独立
共分散≠0、相関係数≠0 ⇔ 独立でない

U,Vの共分散：

$Cov[U,V]$

$= E[(U - E[U])(V - E[V])]$

$= E[UV] = E[(X+Y)(X-Y)]$

$= E[X^2 - Y^2] = E[X^2] - E[Y^2]$

$= \sigma_1^2 - \sigma_2^2$

$X \sim N(0,\sigma_1^2),\quad Y \sim N(0,\sigma_2^2)$

$U = X+Y, V = X-Y$

$U \sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$V \sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$E[U] = E[V] = 0$

$E(X) = 0, V[X] = \sigma_1^2$なので、

$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] = \sigma_1^2$

同様に、$E(Y) = 0, V[Y] = \sigma_2^2$なので、

$V[Y] = E[(Y - E[Y])^2] = E[Y^2] = \sigma_2^2$

公式：

X,Yの共分散：

$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
$= E[XY] - E[X]E[Y]$

X,Yの相関係数：$r[X,Y] = \dfrac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$

U,Vの相関係数

$$r[U,V] = \frac{Cov[U,V]}{\sqrt{V[U]V[V]}} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$の時のみ、$Cov[U,V] = 0$ となる ⇒ U,Vは独立
II は正しい。 (前ページの結果： I,III は正しい)
以上より、I,II,III：すべて正しい ⇒(答)⑤

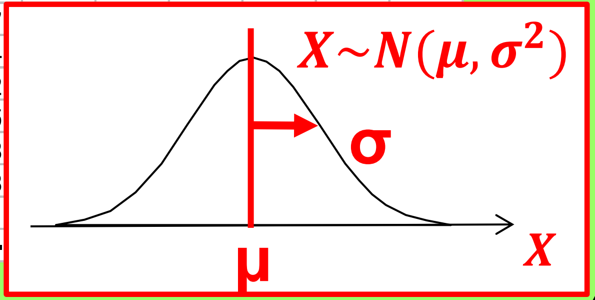
済

(p86.1)[C6]問5. t分布の確率計算

(Aランク)

母集団

10.19	10.85	10.78	10.56	10.24	10.22	10.77
10.69	10.43	10.32	10.55	10.64	10.71	10.68
10.7						
10.4						
10.2						
10.5						
10.3						
10.3						
10.1						
…						



抽出

標本

$X_1, X_2, \dots, X_n \quad (n = 9)$

(例) 10.4, 10.8, 10.6, ..., 10.3

$n = 9$の場合の標本平均:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$= \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9)$$

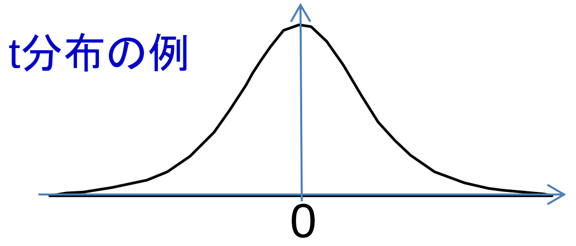
不偏分散:
$V = S^2$

$\bar{X} \geq \mu + 0.62S$ となる確率を求めたい

$\bar{X}$: 標本平均、μ: 母平均、
V: 不偏分散、n: サンプルサイズ　に関して、

(公式)　$T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{V}/\sqrt{n}}$ は

自由度$n-1$　のt分布に従う



(今の例では) $V = S^2$、$n = 9$なので

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{V}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2}/\sqrt{9}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/3}$$

⇒ 自由度$n - 1 = 9 - 1 = 8$　のt分布に従う

⇒(ア) 8, (イ) t

(答)③のみ

(p86.2)[C6]問5. t分布の確率計算

(Aランク)

(今の例では)

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/3}$$

⇒ 自由度 8 のt分布に従う

Q: $\bar{X}\geq\mu+0.62S$　となる確率は？

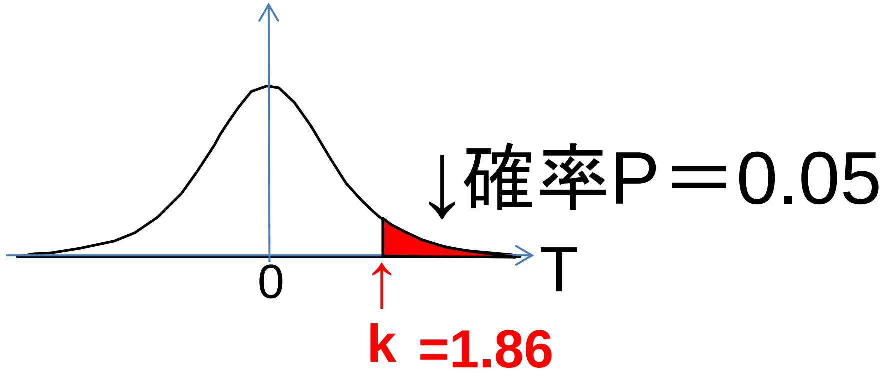
$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/3}\geq\frac{0.62S}{S/3}=1.86$$

自由度ϕ=8で　T≧1.86となる確率を探す

(ウ)確率＝0.05

また、前ページより、(ア) 8, (イ) t　　(答)③

t～自由度ϕのt分布 (ϕ=8)



k=自由度ϕのt分布での上側P点

	片側P=	0.100	0.05	0.025	0.01	0.005
ϕ=	1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
	2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
	3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
	4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
	5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
	6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
	7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
	8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
	9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
	10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
	11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106

済

(p88.1)[C6]問6. 分散・共分散・相関係数

(Bランク)

X_1, X_2, X_3は標準化した得点なので、

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = 0$$
$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = 1$$

相関係数は、

$$r[X_1, X_2] = 0.5$$
$$r[X_2, X_3] = 0.5$$
$$r[X_3, X_1] = 0.5$$

(例) 実際の得点

	英語	数学	国語
平均	60	70	65
標準偏差	15	10	5

	英語	数学	国語
生徒1	72	65	69
生徒2	62	73	63
・・・	・・・	・・・	・・・

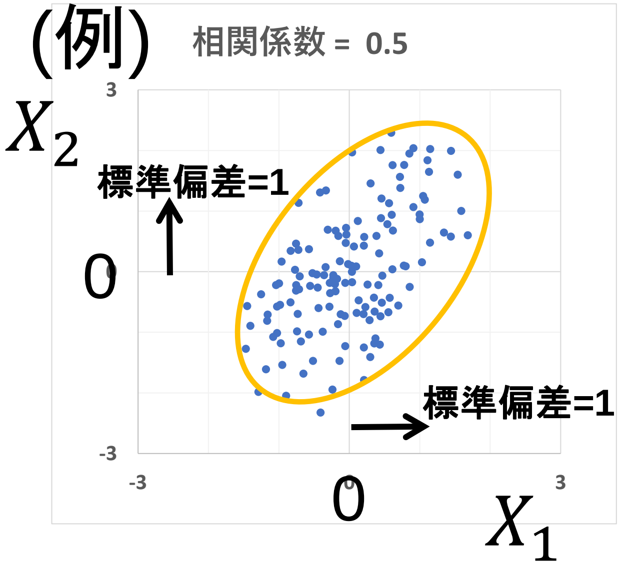
標準化得点 = (実得点ー平均) / 標準偏差

	英語	数学	国語
平均	0.00	0.00	0.00
標準偏差	1.00	1.00	1.00

	X_1	X_2	X_3	平均(Y)
⇒ 生徒1	0.80000	-0.50000	0.80000	0.36667
⇒ 生徒2	0.13333	0.30000	-0.40000	0.01111
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・

相関係数

0.5 0.5 0.5 ?



X_2, X_3間の相関、
X_3, X_1間の相関も同様

Q: X_1, X_2, X_3の平均 : $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$と$X_1$の相関係数は？

(ある科目の点数が高い人は
別の教科の点数も高い傾向がある)

(p88.2)[C6]問6. 分散・共分散・相関係数

平均:
$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = 0$

分散:
$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = 1$

相関係数:
$r[X_1, X_2] = 0.5$
$r[X_2, X_3] = 0.5$
$r[X_3, X_1] = 0.5$

標準化得点の平均:
$Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$

$r[X_1, Y] = ?$

分散、共分散、相関係数関係の公式:

(1) Xの平均: $E(X)$, (2) Yの平均: $E(Y)$

(3) Xの分散: $V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$

(4) Yの分散: $V[Y] = E\left[(Y - E[Y])^2\right] = E\left[Y^2\right] - (E[Y])^2$

(5) X, Yの共分散:

$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

(6) X, Yの相関係数: $r[X, Y] = \dfrac{Cov[X, Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$

(p88.3)[C6]問6. 分散・共分散・相関係数 (Bランク)

$E[X_1]=E[X_2]=E[X_3]=0$
$V[X_1]=V[X_2]=V[X_3]=1$
$r[X_1,X_2]=r[X_2,X_3]=r[X_3,X_1]=0.5$

公式: $Cov[X,Y]=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$E[X_1]=0$

$V[X_1]=E\left[(X_1-E[X_1])^2\right]=E\left[X_1^2\right]$
$V[X_1]=1$なので$E\left[X_1^2\right]=1$

$E\left[X_1^2\right]=E\left[X_2^2\right]=E\left[X_3^2\right]=1$

$Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$

(5) 共分散:
$Cov[X_1,Y]$
$=E[(X_1-E[X_1])(Y-E[Y])]$
$=E[X_1Y]-E[X_1]E[Y]$
$=E[X_1Y]$

$E[X_1]=0$

$r[X_1,X_2]=r[X_2,X_3]=r[X_3,X_1]=0.5$
$r[X_1,X_2]=\frac{Cov[X_1,X_2]}{\sqrt{V[X_1]V[X_2]}}=Cov[X_1,X_2]$
$Cov[X_1,X_2]$
$=E[X_1X_2]-E[X_1]E[X_2]$
$=E[X_1X_2]=0.5$

$E[X_1]=0$

$E[X_1X_2]=E[X_2X_3]=E[X_3X_1]=0.5$

(6) 相関係数:
$$r[X_1,Y]=\frac{Cov[X_1,Y]}{\sqrt{V[X_1]V[Y]}}=\frac{E[X_1Y]}{\sqrt{E[Y^2]}}$$

$V[X_1]=1$

$V[Y]=E\left[(Y-E[Y])^2\right]$
$=E\left[Y^2\right]-(E[Y])^2$
$=E\left[Y^2\right]$

$E[Y]=E\left[\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)\right]$
$=\frac{1}{3}(E[X_1]+E[X_2]+E[X_3])=0$

$E[X_1]=E[X_2]=E[X_3]=0$

(p88.4)[C6]問6. 分散・共分散・相関係数

(Bランク)

これまで得られたこと:

$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = 0$

$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = 1$

$E[X_1^2] = E[X_2^2] = E[X_3^2] = 1$

$E[X_1X_2] = E[X_2X_3] = E[X_3X_1] = 0.5$

$$Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$

$$E[X_1Y] = E\left[X_1 \times \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(E[X_1^2] + E[X_1X_2] + E[X_1X_3]\right) = \frac{1}{3}(1 + 0.5 + 0.5) = \frac{2}{3}$$

$$r[X_1, Y] = \frac{E[X_1Y]}{\sqrt{E[Y^2]}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$$

$$E[Y^2] = E\left[\frac{1}{9}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2X_1X_2 + 2X_2X_3 + 2X_3X_1)\right]$$
$$= \frac{1}{9}\left(E[X_1^2] + E[X_2^2] + E[X_3^2] + 2E[X_1X_2] + 2E[X_2X_3] + 2E[X_3X_1]\right)$$
$$= \frac{1}{9}(1 + 1 + 1 + 2 \times 0.5 + 2 \times 0.5 + 2 \times 0.5) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(答)⑤

大変面倒な計算ですね。 受験時、難しいと思われる方は、スキップをおすすめします

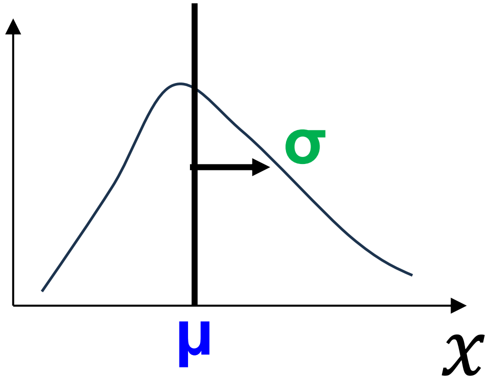
済

(p90.1)[C6]問7. X^2の期待値

(Aランク)

$E[X] = \mu$

$V[X] = \sigma^2$ とする。 ⇒ $E[X^2] = ?$



分散公式： (3) Xの分散：

$$V[X] = E[(X - E[X])^2]$$
$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$$

$$E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$$ ⇒(答)③

済

(p92.1) [C6]問8. F分布の特徴付け

χ^2分布, t分布, F分布の一般的な説明

統計学基礎(東京図書)
p86～91

確率変数$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ が互いに独立に標準正規分布N(0,1)に従う時、

$$W = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

の従う分布を自由度nの χ^2分布と呼ぶ。$\chi^2(n)$と表す。

独立な2つの確率変数ZとWがあり、Zが標準正規分布N(0,1)に従い、
Wが自由度mの χ^2分布に従う時、$t = \dfrac{Z}{\sqrt{W/m}}$ の従う分布を、
自由度mの t分布とよぶ。$t(\mathrm{m})$と表す。

独立に$\chi^2(\boldsymbol{m_1}), \chi^2(\boldsymbol{m_2})$に従う2つの確率変数$W_1, W_2$があり、
それぞれをその自由度$\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2}$で割って比をとった

$$F = \frac{W_1/m_1}{W_2/m_2}$$

の従う分布を、自由度$(\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2})$のF分布と呼ぶ。記号$F(\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2})$で表す。

ちょっと難しいとお感じの方も
おられると思います。
初見の方は、
スキップされるか、
悩まず楽にご覧ください。
（8割以上を目指す方向け問題）

(p92.2)[C6]問8. F分布の特徴付け

(Cランク)

$p92$. 問8の問題

確率変数 $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$ ：互いに独立にN(0,1)に従う。

$T = Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2 + Z_6^2$

とおくと、Tは（ 自由度5の χ^2分布 ）に従う。

$V = \dfrac{Z_1}{\sqrt{T/5}}$ は（ 自由度5の t分布 ） に従う。

(答)(ア)A3

$W = \dfrac{T/5}{Z_1^2} = \dfrac{(Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2 + Z_6^2)/5}{(Z_1^2)/1}$

は、（ 自由度$(\mathbf{5}, \mathbf{1})$のF分布 ）に従う。

(答)(イ)B2

χ^2分布, t分布, F分布の一般的な説明

確率変数$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ が互いに独立に標準正規分布N(0,1)に従う時、

$$W = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

の従う分布を自由度nの χ^2分布と呼ぶ。$\chi^2(n)$と表す。

独立な2つの確率変数ZとWがあり、Zが標準正規分布N(0,1)に従い、Wが自由度mの χ^2分布に従う時、$t = \dfrac{Z}{\sqrt{W/m}}$ の従う分布を、自由度mの t分布とよぶ。$t(\mathrm{m})$と表す。

独立に$\chi^2(\boldsymbol{m_1}), \chi^2(\boldsymbol{m_2})$に従う2つの確率変数$W_1, W_2$があり、それぞれをその自由度$\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2}$で割って比をとった

$$F = \frac{W_1/m_1}{W_2/m_2}$$

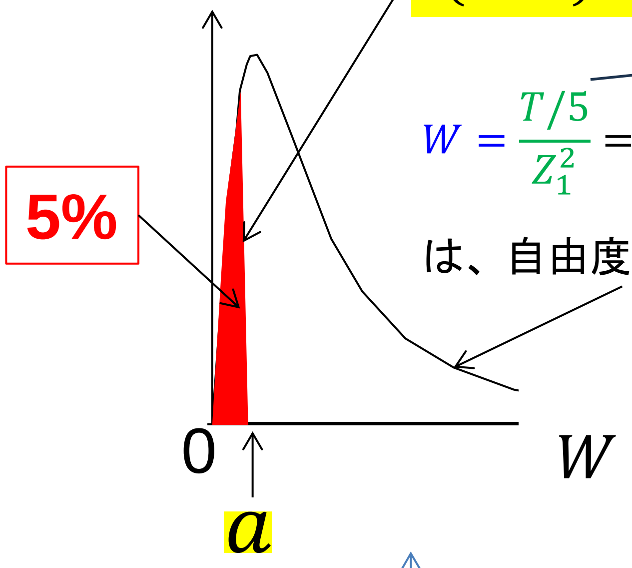
の従う分布を、自由度$(\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2})$のF分布と呼ぶ。記号$F(\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2})$で表す。

(ア)A3、(イ)B2 ⇒(答)⑤

(p92.3)[C6]問8(ウ). F分布の特徴付け

(Bランク)

(問題)　赤領域の確率が5%となるaは？



$$W = \frac{T/5}{Z_1^2} = \frac{(Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2 + Z_6^2)/5}{(Z_1^2)/1}$$

は、自由度$(5,1)$のF分布　に従う。

$$V = \frac{Z_1}{\sqrt{T/5}}$$ は　自由度5の t分布　に従う。

$$V^2 = \frac{Z_1^2}{T/5} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V^2} = \frac{T/5}{Z_1^2}$$

$$W = \frac{T/5}{Z_1^2} = \frac{1}{V^2}$$

p201　t分布表

片側P=	0.100	0.05	0.025	0.01	0.005
ϕ = 1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	$\boxed{2.571}$	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106

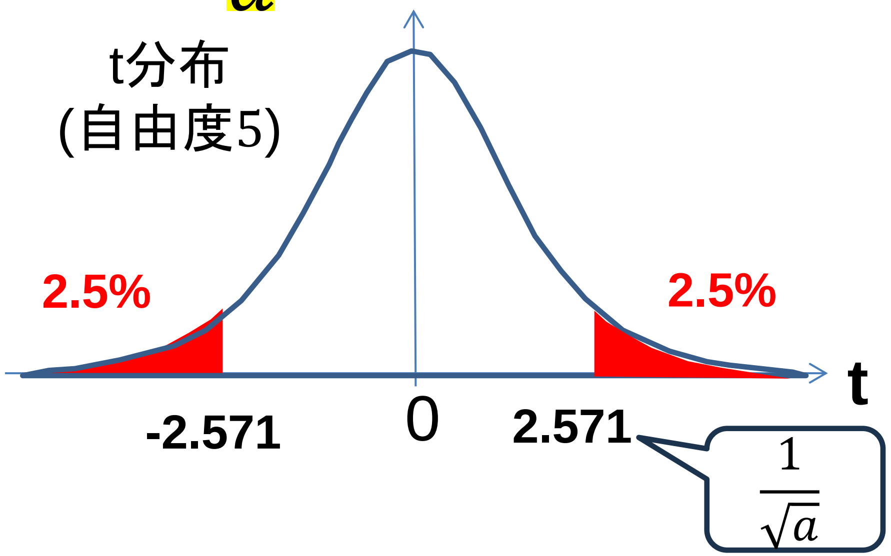
$W \leq a$となる確率は5%

$\frac{1}{V^2} \leq a$となる確率は5%

$|V| \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$となる確率は5%

但し、Vは　自由度5の t分布に従う

t分布
(自由度5)



t分布表を使うと、　$\frac{1}{\sqrt{a}} = 2.571$

$$a = \frac{1}{2.571^2} = 0.151$$

⇒(ウ)C2

(ア)A3、(イ)B2、(ウ)C2　⇒(答)⑤

済

(p92.4)[C6]問8. F分布の特徴付け(ウの別解)

(Bランク)

Wは、自由度$(5,1)$のF分布 に従う。

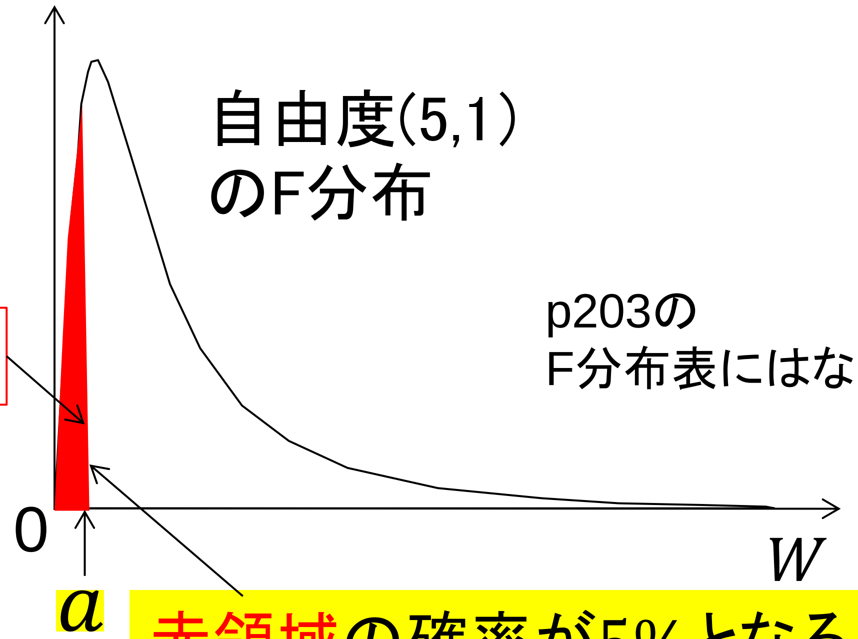
$$W=\frac{(Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2+Z_6^2)/5}{(Z_1^2)/1}$$

逆数の関係

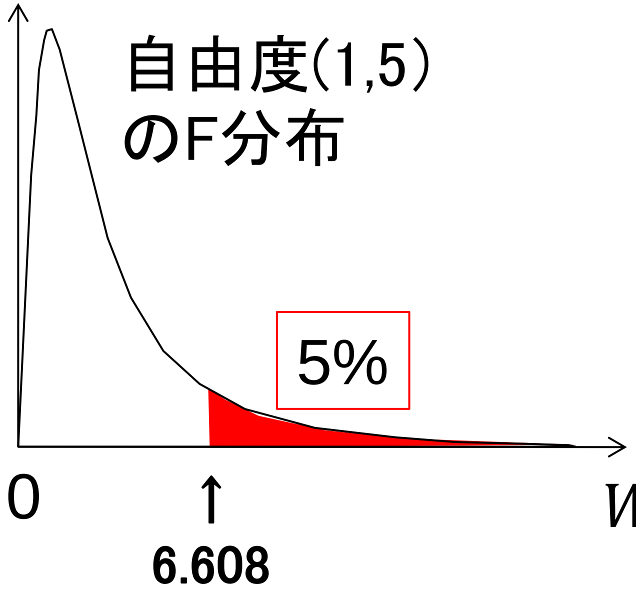
$$W'=\frac{1}{W}$$

W'は、自由度(1,5)のF分布 に従う。

$$W'=\frac{(Z_1^2)/1}{(Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2+Z_6^2)/5}$$



p203の
F分布表にはないので、右を使う⇒



$$W'=\frac{1}{W}$$

自由度(ϕ_1,ϕ_2)の
F分布における
上側5%点

	ϕ1	
	1	5
ϕ2= 1	161.45	230.16
2	18.51	19.30
3	10.13	9.013
4	7.709	6.256
5	$\boxed{6.608}$	5.050
6	5.987	4.387
7	5.591	3.972
8	5.318	3.687

赤領域の確率が5%となるaを求めたい

$W\le a$

$$\frac{1}{W}\ge\frac{1}{a}$$

$$W'=\frac{1}{W}\ge\frac{1}{a}=6.608$$

$$a=\frac{1}{6.608}=0.151$$

⇒(ウ)C2

(ア)A3
(イ)B2
(ウ)C2

(答)⑤

(参考)
入門統計解析法
p89