ひかり統計塾

統計検定２級
公式問題集(CBT対応版)の解説

カテゴリー5（p66-77）
確率分布の分野

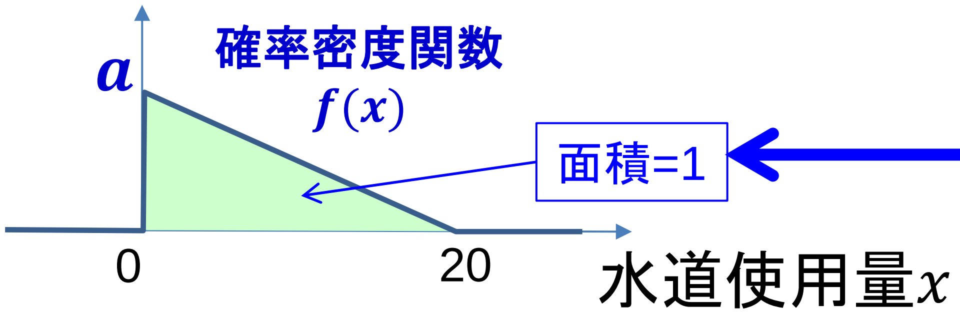
統計検定2級　CBT問題集　PART.2 目次

[C5]
[CATEGORY.5]
確率分布の分野

(p66.1)[C5]問1. 確率分布の定数の決定

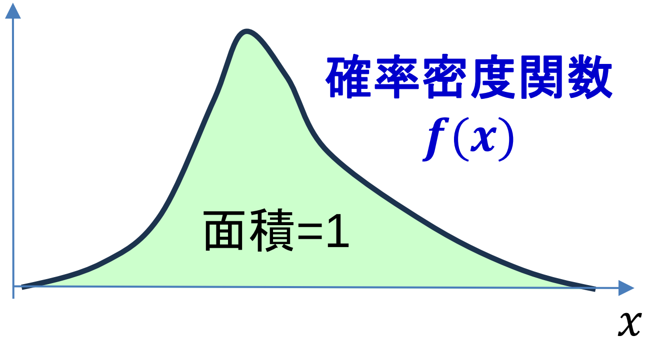
(Aランク)

水道使用量の分布・・・連続分布



公式

連続分布



$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$を満たす必要がある

$$f(x) = a\left(1 - \frac{x}{20}\right) \quad (0 \leq x < 20)$$

$$f(x) = 0 \quad (x < 0, x \geq 20)$$

$\Rightarrow a$ の値は？

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{20} f(x)dx = 1$を

満たす必要がある

面積=$\frac{1}{2} \times 20 \times a = 10a = 1$

$a = \frac{1}{10} = 0.1$ (答)④

p67の様に、積分を使ってもできますが、
こちらの方がとても簡単です

済

(p68.1)[C5]問2. 正規確率の計算

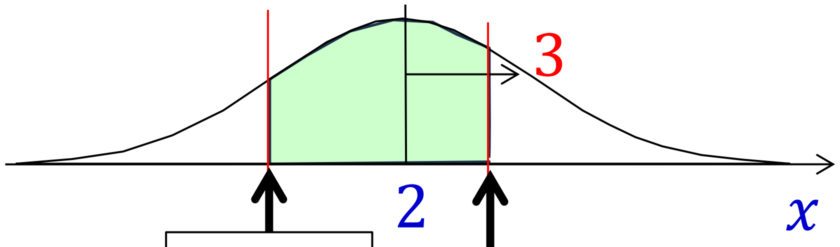
(Aランク)
超基本＆超重要

$X \sim N(2, 3^2)$

$Z = \dfrac{X-2}{3}$

$Z \sim N(0,1)$

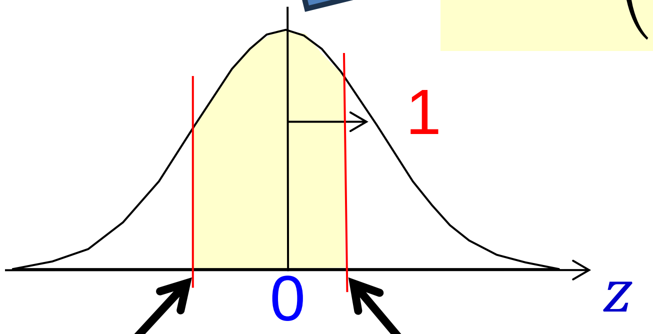
Q: 確率$P(-1 < X \leq 4)$はいくら？



$x = -1$

$x = 4$

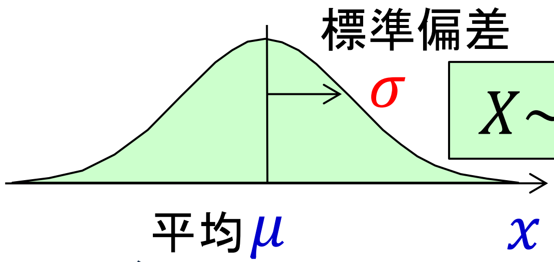
確率$P\left(-1 < Z \leq \dfrac{2}{3}\right)$



$z = \dfrac{-1-2}{3} = -1$

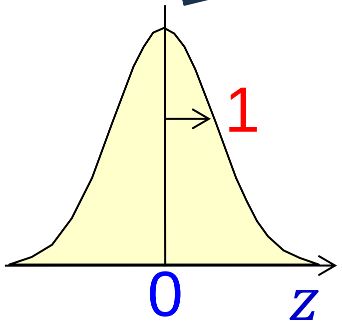
$z = \dfrac{4-2}{3} = \dfrac{2}{3} \fallingdotseq 0.67$

公式(確率変数の標準化)



$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$



$Z \sim N(0,1)$

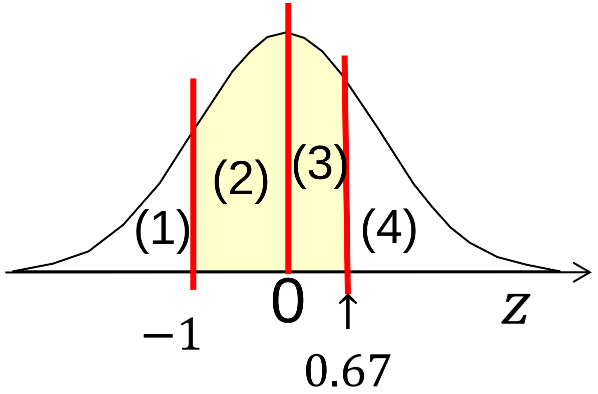
(公式)$X \sim N(\mu, \sigma^2)$)の時、
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$と変換すると、$Z \sim N(0,1)$となる

(p68.2)[C5]問2. 正規確率の計算

(Aランク)
超基本&超重要

$Z \sim N(0,1)$

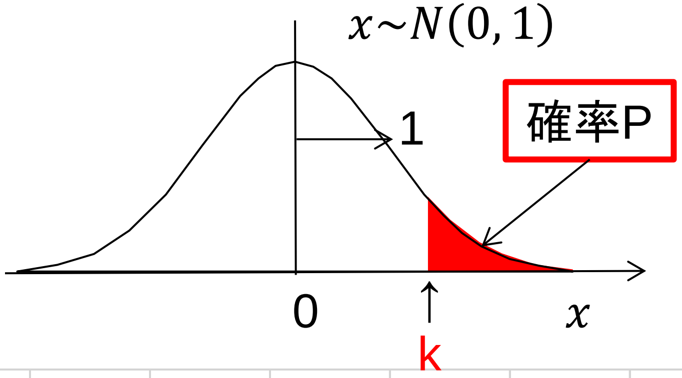
確率$P(-1 < Z \le 0.67)$ =(2)+(3)



(補足)
連続分布では、

$P(-1 < Z < 0.67)$
$= P(-1 < Z \le 0.67)$
$= P(-1 < Z \leqq 0.67)$

$P(Z = 0.67) = 0$



p200 付表1
標準正規分布の
上側確率

k=k1+k2											
	k2=	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
k1=	0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
	0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
	0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
	0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
	0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
	0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
	0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
	0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
	0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
	0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
	1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
	1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
	1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
	1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
	1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
	1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
	1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
	1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
	1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
	1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
	2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
	2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
	2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	[illegible]
	2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	[illegible]
	2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	[illegible]
	2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	[illegible]

右の表で
k=1.00 (k1=1.0, k2=0.00)を見ると (1)=0.1587
k=0.67 (k2=0.6, k2=0.07)を見ると (4)=0.2514
また、(1)+(2)+(3)+(4)=1

従って、
確率$P = (2) + (3) = 1 - ((1) + (4))$
$= 1 - (0.1587 + 0.2514) = 0.590$

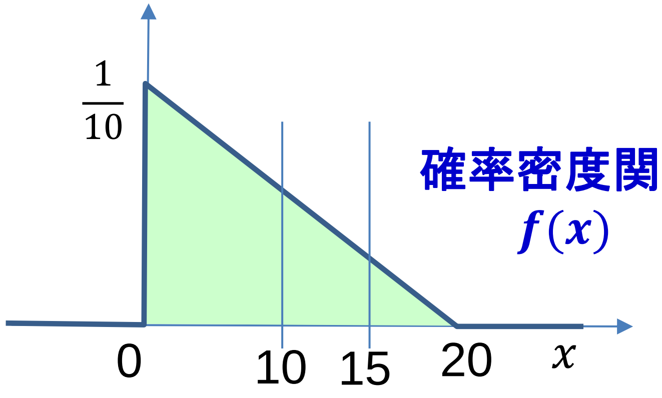
(答)⑤

済

(p70.1)[C5]問3. 確率変数の関数の期待値

(Aランク)

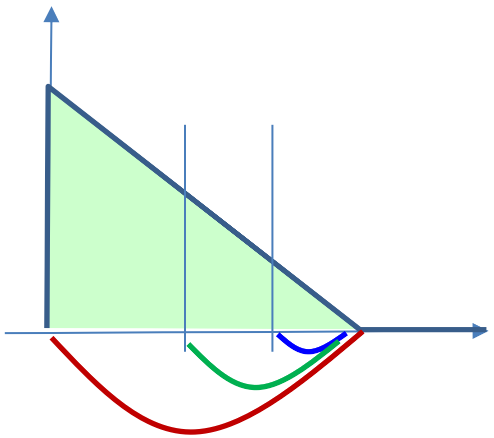
問1、66ページでやった問題の続き



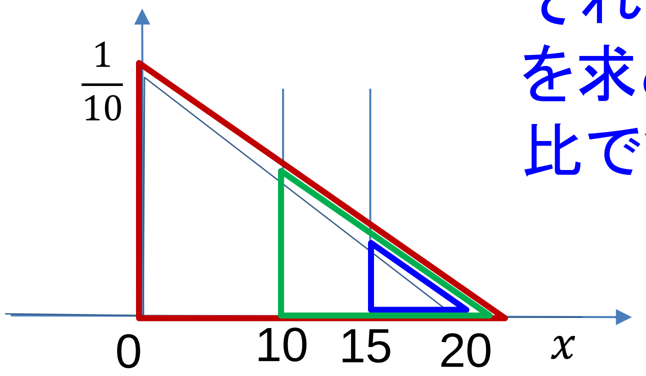
確率密度関数 $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{x}{20}\right) \quad (0 \leq x < 20)$$

$$f(x) = 0 \quad (x < 0, x \geq 20)$$



長さの比=4:2:1



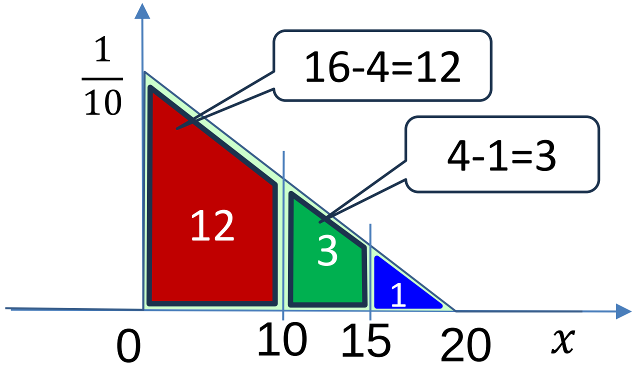
△の面積比=16:4:1

それぞれの確率=面積を求めます。
比で簡単に計算できます。

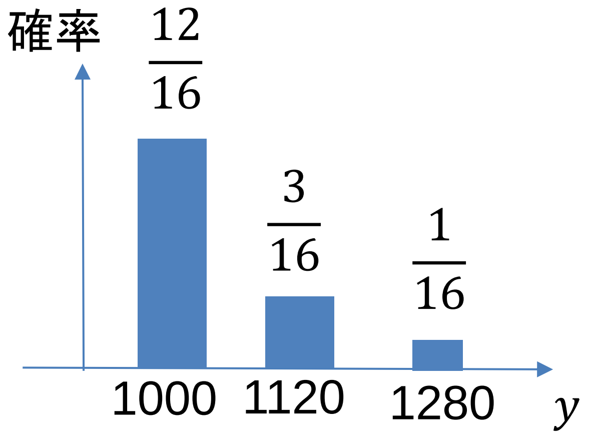
水道使用量	水道使用料金(円)	確率
$0 \leq x < 10$	1000	12/16
$10 \leq x < 15$	1120	3/16
$15 \leq x < 20$	1280	1/16

計： 1

Q: 水道の使用料金の期待値は？



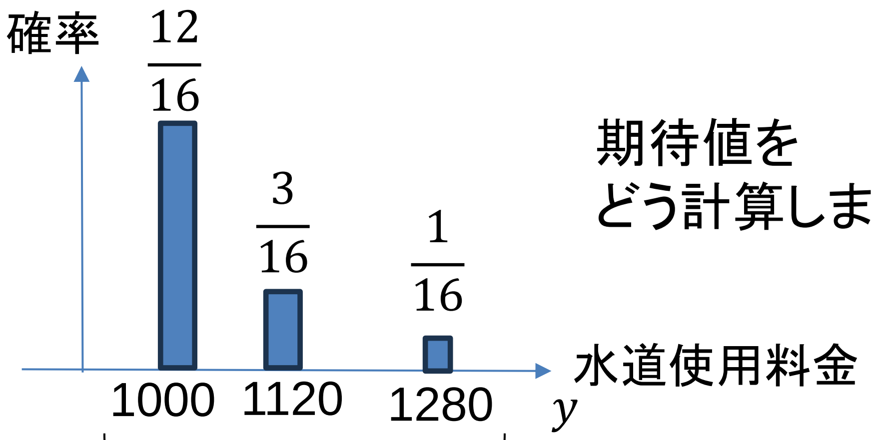
台形などの面積比=12:3:1



水道使用料金

(p70.2)[C5]問3. 確率変数の関数の期待値

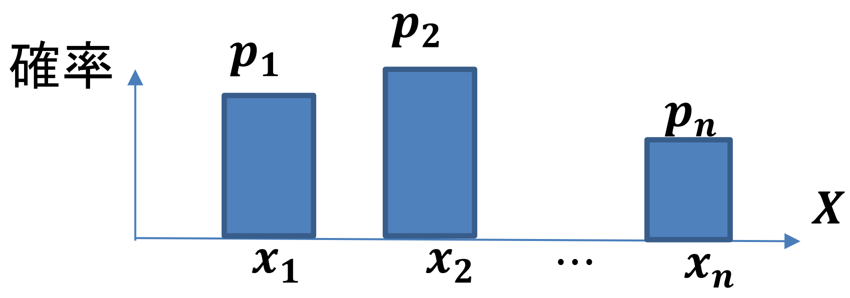
(Aランク)



期待値を
どう計算しますか？

公式(離散型確率変数の期待値):

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$



Yの期待値: $E(Y) = 1000 \times \frac{12}{16} + 1120 \times \frac{3}{16} + 1280 \times \frac{1}{16} = \frac{16640}{16} = 1040 \quad \Rightarrow$ (答)②

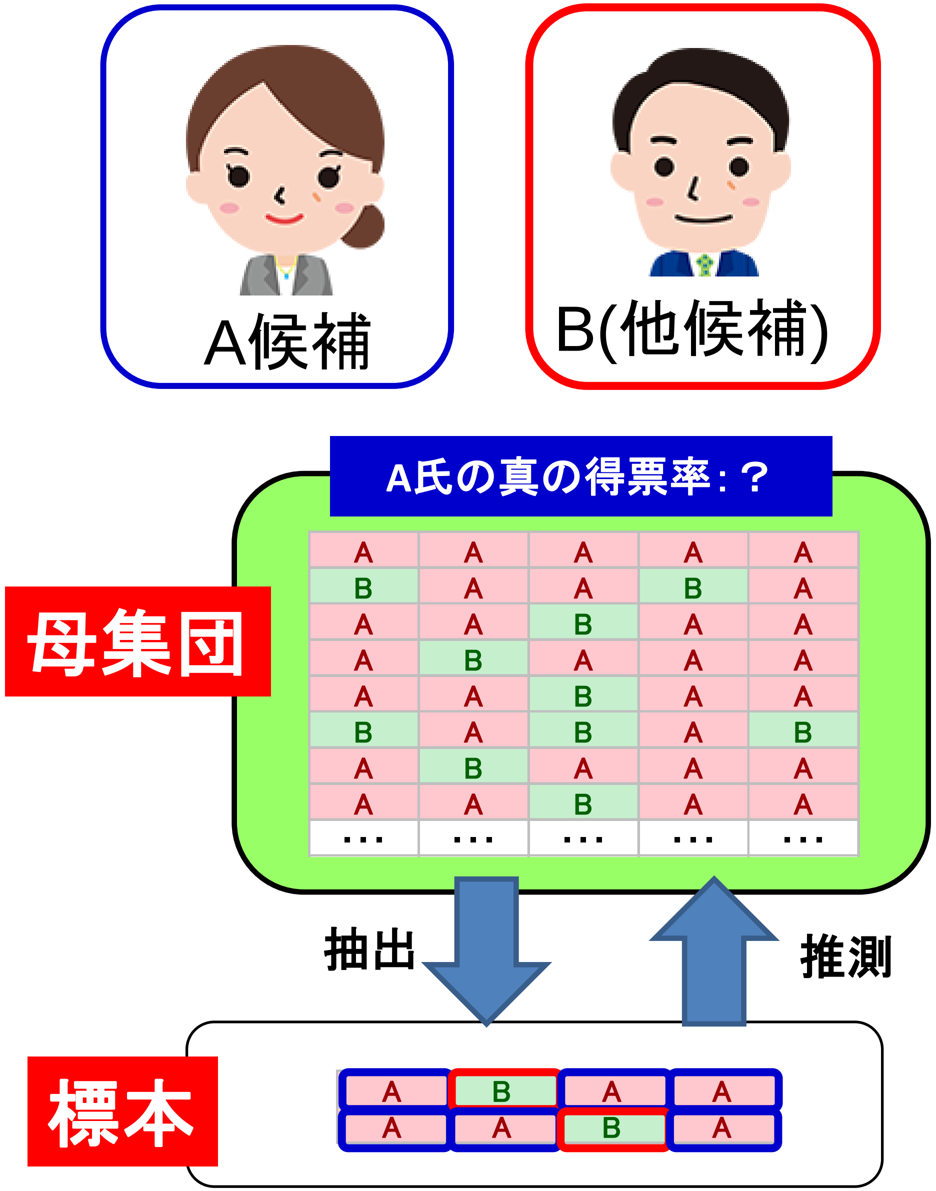
(補足)期待値⇔平均なので、必ず　この範囲にあるはず。
選択肢①④⑤はありえない。
また、この図を描いた時点で、③1250円もありえない。
答：②　としてもいい　(時間ない時)

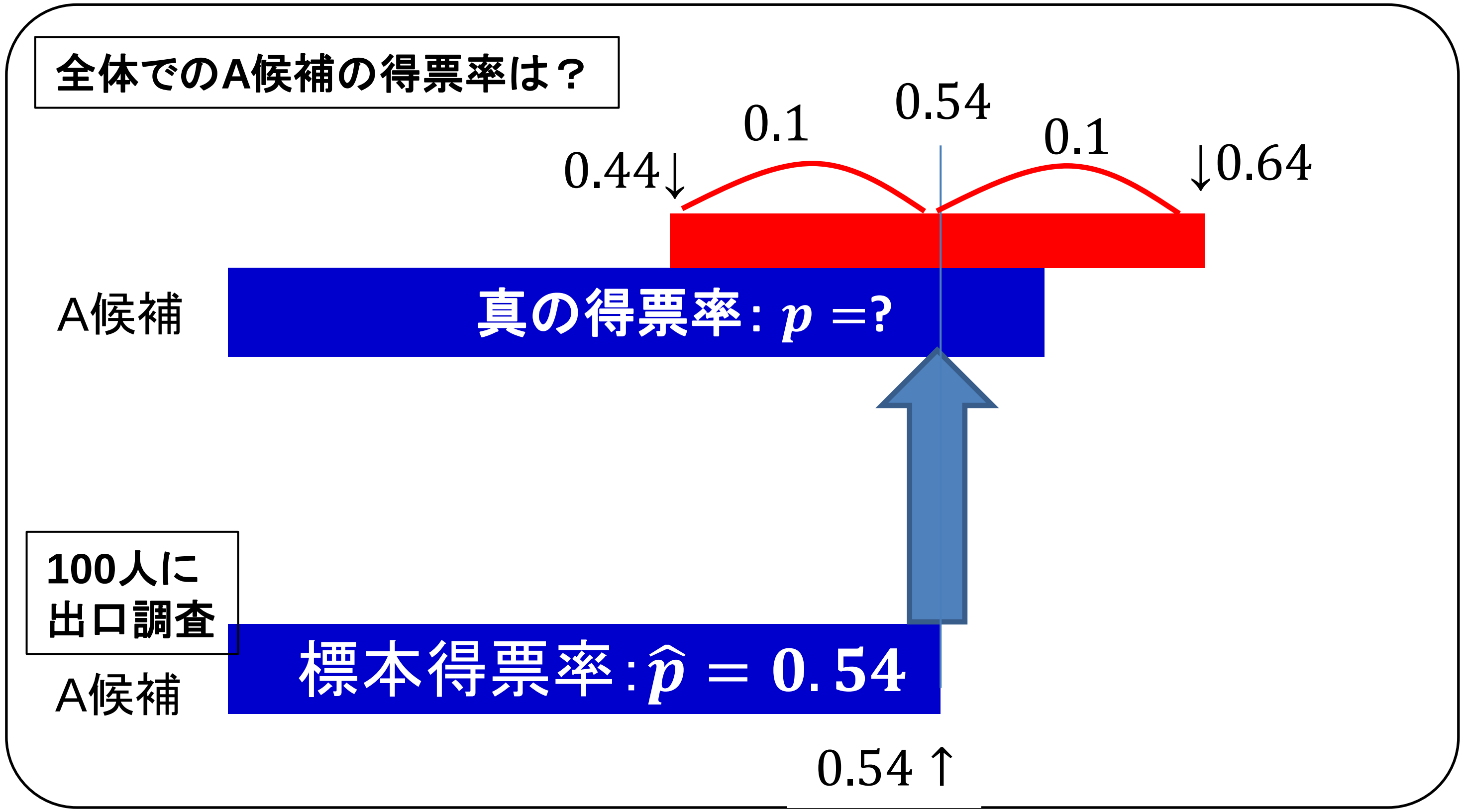
p71の様に、積分を使ってもできますが、
こちらの方がとても簡単です

済

(p72.1)[C5]問4. 二項分布の正規近似

$|\hat{p} - p| \leq 0.1$ となる確率は？
$(44\% \leq p \leq 64\%$となる確率は？$)$





(p72.2)[C5]問4. 二項分布の正規近似

(Bランク)

出口調査した対象人数: $n = 100$
A氏の標本得票率: $\hat{p} = 0.54$
A氏の真の得票率: p ・・・?

(公式1) 母比率: p、標本比率: $\hat{p}$、サンプルサイズ: n

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

(公式2) 標準化 p68で使用

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z \sim N(0,1)$$

標本得票率: $\hat{p}$は正規分布に従う

$\hat{p}$を標準化する

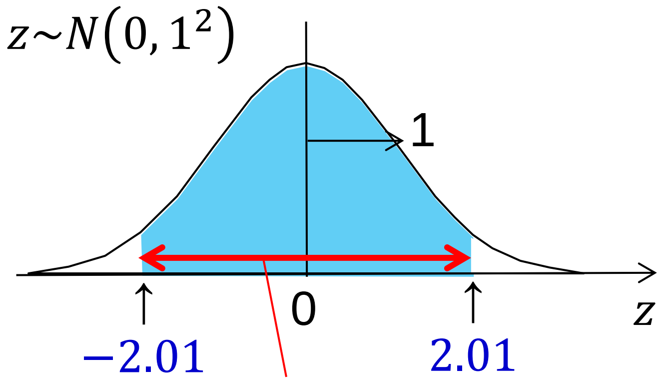
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

zの分母の計算をする

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \fallingdotseq \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.54 \times 0.46}{100}} = 0.0498$$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{0.0498} \sim N(0,1)$$

$|\hat{p} - p| \leq 0.1$ の時、$|z| = \frac{|\hat{p} - p|}{0.0498} \leq \frac{0.1}{0.0498} = 2.01$



$|z| \leq 2.01$
$(-2.01 \leq z \leq 2.01)$

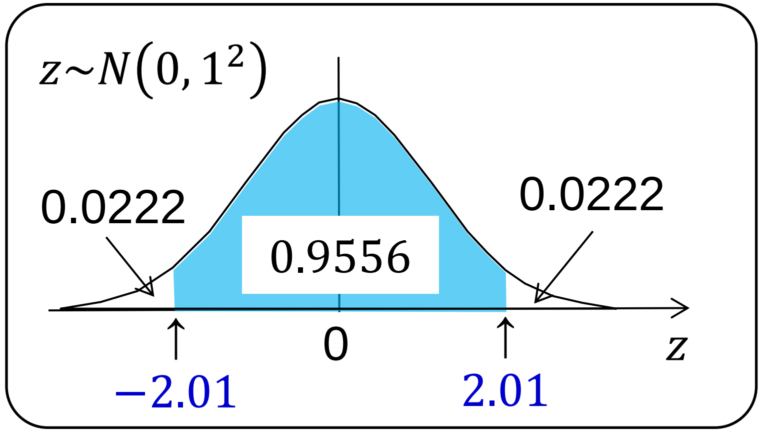
対応する確率(面積)は?

(p72.3)[C5]問4. 二項分布の正規近似

(Bランク)

$|z| \leq 2.01$となる確率を求める

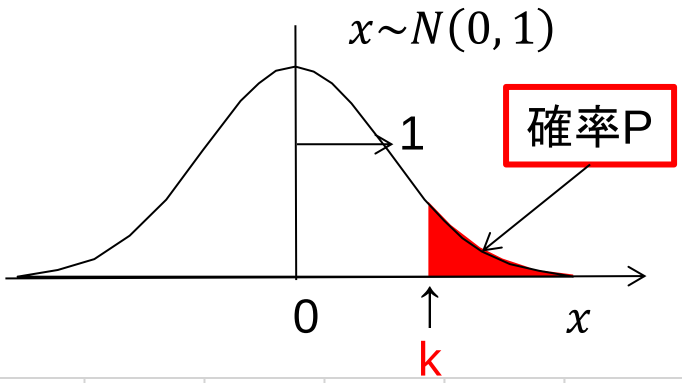
$(-2.01 \leq z \leq 2.01)$



確率$=1-0.0222\times 2 = 0.9556$

⇒(答)⑤

済



p200 付表1
標準正規分布の
上側確率

k=k1+k2										
k2=	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
k1= 0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048

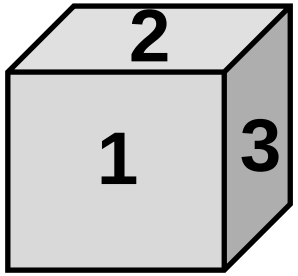
(p74.1)[C5]問5.二項確率の比

(Bランク)

サイコロの目は?

$P = \frac{1}{3}$　　1,2　事象A

$P' = 1 - P = \frac{2}{3}$　　3,4,5,6　事象B



サイコロを7回投げる
事象Aが起こった回数(2以下の目が出る回数)をXとする。

事象Aが起こる確率は1/3
事象Bが起こる確率は2/3

例: A B A B B A B ：X=3

B B A B A B B ：X=2

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{7回(7個)}$

7回ともAが出る確率(AAAAAAA)

$$P(X=7) = \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

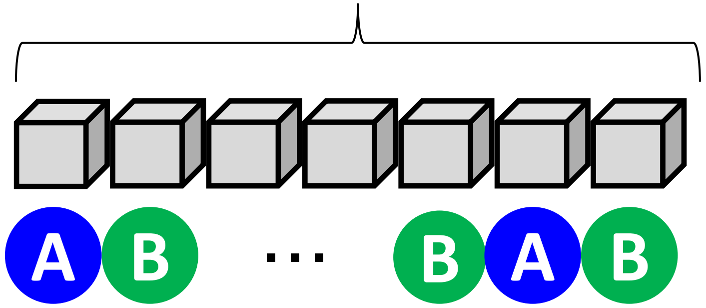
7回ともBが出る確率(BBBBBBB)

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

X=1,2,3,...,6の時の確率$P(X=x)$は？

(p74.2)[C5]問5.二項確率の比:　二項分布とは

サイコロ投げ:n=7回



AがX回　Bがn-X回

Aが起こる確率:
P=1/3

二項分布　成功確率Pのn回の試行を行った時に
成功の回数がx,失敗の回数がn-xである確率は、

$$Pr(X=x) = {}_nC_x\ P^x(1-P)^{n-x} \quad (x=0,1,2,\ldots,n)$$

(補足) ${}_nC_x$:高校数学で出てくる
「n個からx個を選ぶ時の組み合わせの数」

で与えられます。
このような確率に従う分布を「二項分布」とよびます。
$\boldsymbol{B(n,P)}$　と表記します。例:$\boldsymbol{X \sim B(n,P)}$

二項係数: $${}_nC_k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k\text{個}}}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

階乗:
$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$

例: $${}_8C_4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$$ の様に計算できます。

(p74.3)[C5]問5.二項確率の比

(Bランク)

問題: $\boxed{\dfrac{P(X=x+1)}{P(X=x)}} = \dfrac{-x+a}{2x+b}$ となる a, b は？

但し、$n=7, P=\frac{1}{3}$

とりあえず、二項分布の式を使って、$\boxed{\text{左辺}}$ を計算してみましょう。

$$P(X=x+1) = {}_nC_{x+1}\ P^{x+1}(1-P)^{n-(x+1)} \quad (x=0,1,2,\ldots,n-1)$$

$$P(X=x) = {}_nC_x\ P^x(1-P)^{n-x} \quad (x=0,1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{P(X=x+1)}{P(X=x)} = \frac{{}_nC_{x+1}\ P^{x+1}(1-P)^{n-x-1}}{{}_nC_x\ P^x(1-P)^{n-x-1+1}} = \frac{{}_nC_{x+1}}{{}_nC_x} \times \boxed{P \times \frac{1}{1-P}} = \boxed{\frac{1}{2}}\frac{{}_nC_{x+1}}{{}_nC_x}$$

$P=\dfrac{1}{3}$ なので、$\boxed{P\times\dfrac{1}{1-P}} = \dfrac{1/3}{1-1/3} = \dfrac{1/3}{2/3} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

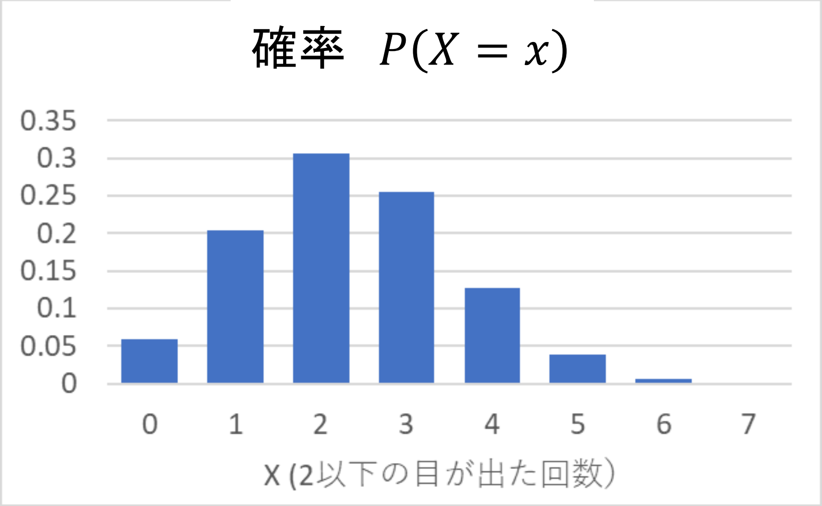
(p74.4)[C5]問5. 二項確率の比

(Bランク)

$$\frac{P(X=x+1)}{P(X=x)}=\frac{1}{2}\boxed{\frac{{}_nC_{x+1}}{{}_nC_x}}$$

$${}_nC_x=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)\cdots 1}$$

$${}_nC_{x+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)(n-x)}{(x+1)x(x-1)(x-2)\cdots 1}={}_nC_x\frac{n-x}{x+1}$$



x	確率:P(X=x)
0	0.05853
1	0.20485
2	0.30727
3	0.25606
4	0.12803
5	0.03841
6	0.00640
7	0.00046

$$\Rightarrow \boxed{\frac{{}_nC_{x+1}}{{}_nC_x}}=\frac{n-x}{x+1}$$

$$\frac{P(X=x+1)}{P(X=x)}=\frac{1}{2}\boxed{\frac{n-x}{x+1}}=\frac{7-x}{2x+2}=\frac{-x+7}{2x+2}\Leftrightarrow\frac{-x+a}{2x+b}$$

↑ $n=7$

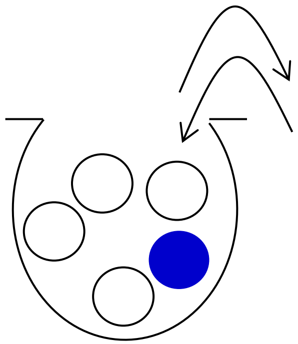
↑

比較すると、 $a=7, b=2$

(答)②

済

(p74.5)[C5](補足) 問4,問5 二項分布の正規近似(1)

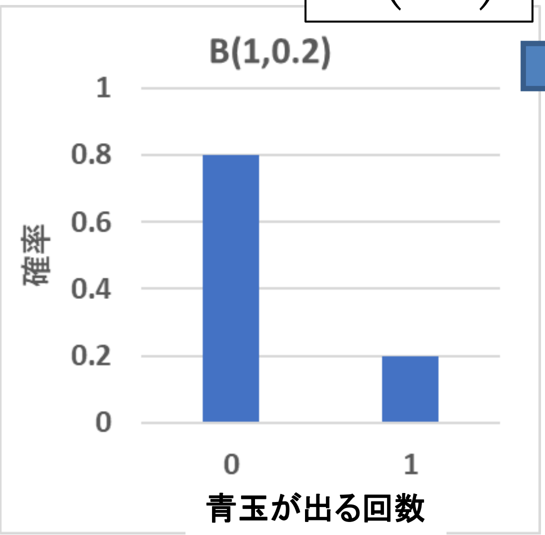


p72問4の題目:「二項分布の正規近似」 説明していませんでした。
p74問5･･･説明で、「二項分布」が出てきました。

このスライドで「二項分布の正規近似」 を説明します

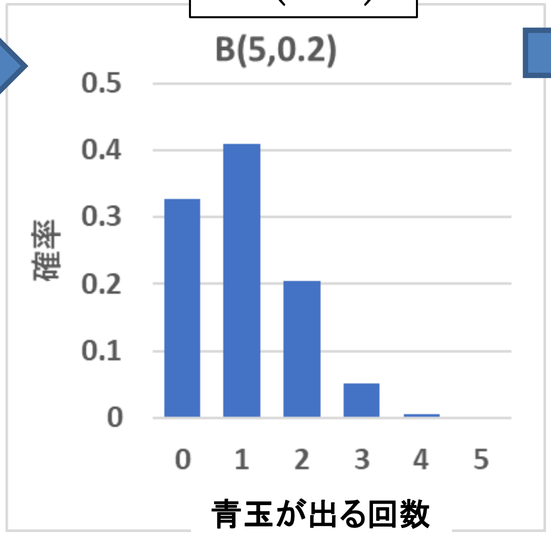
$B(n, P)$

$B\left(1, \frac{1}{5}\right)$



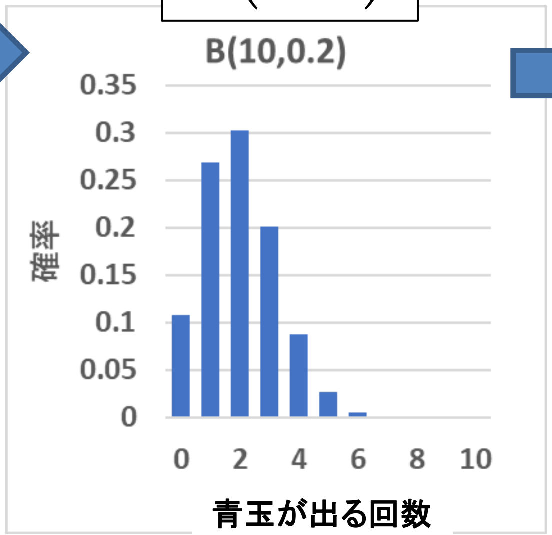
１回取り出した時、
青玉が出る回数

$B\left(5, \frac{1}{5}\right)$



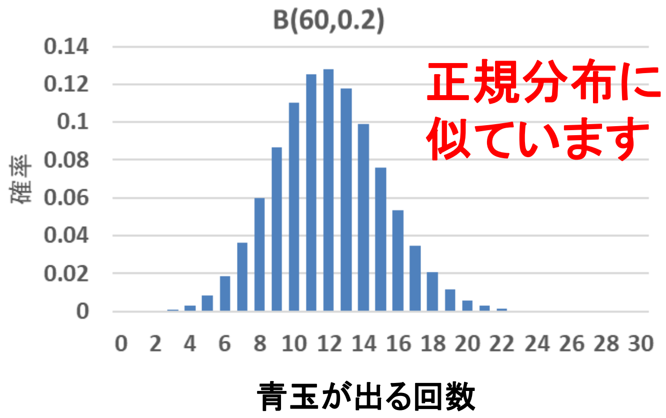
５回取り出した時、

$B\left(10, \frac{1}{5}\right)$



10回取り出した時、

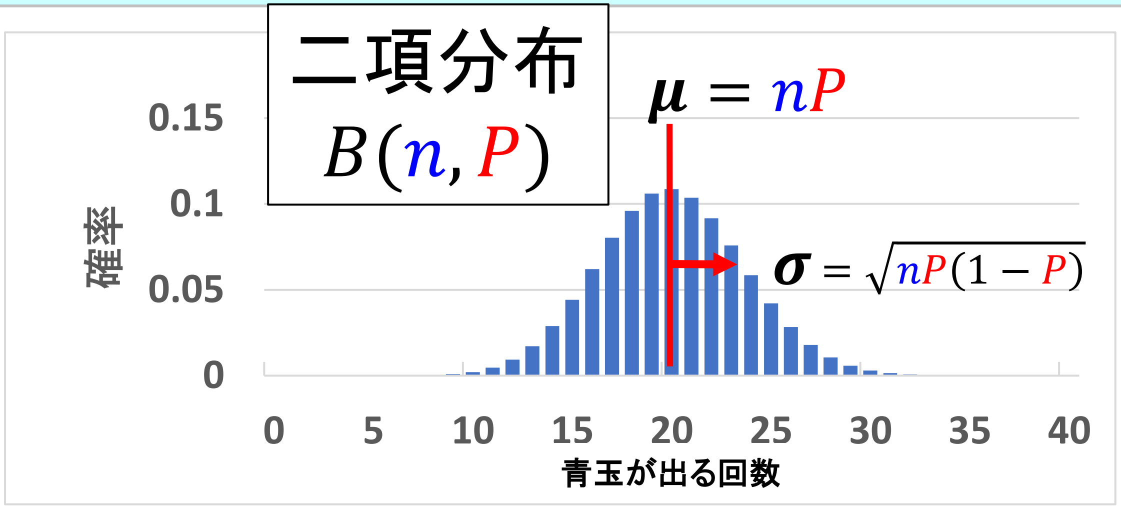
$B\left(60, \frac{1}{5}\right)$

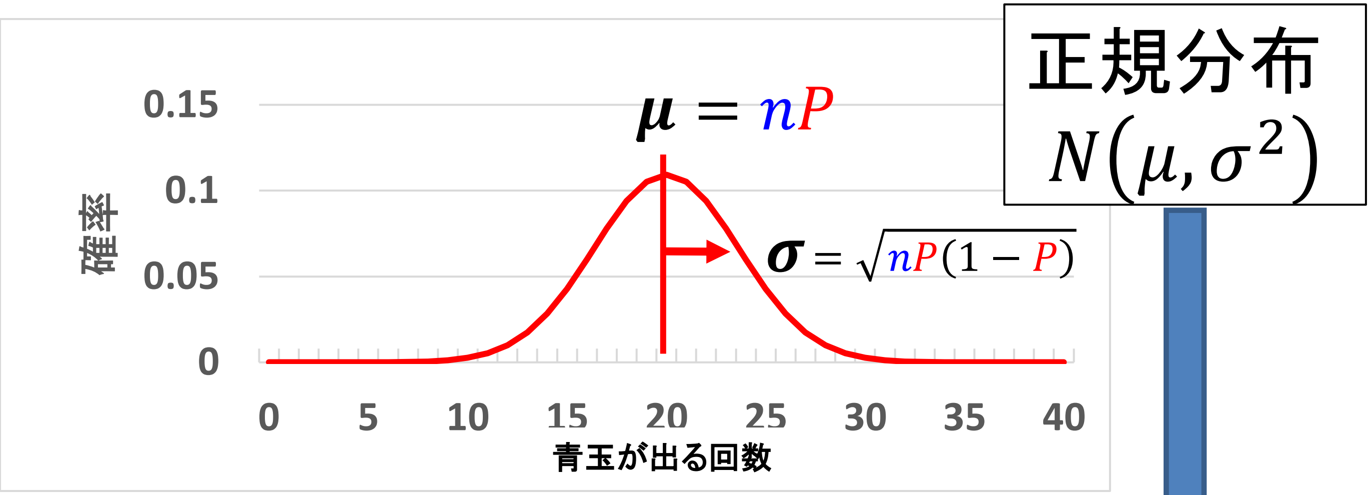


正規分布に
似ています

60回取り出した時、

(p74.6)[C5](補足) 問4,問5 二項分布の正規近似(2)





確率変数Xが二項分布　$B(n,P)$に従う時、

平均: $E[X] = nP$

分散: $V[X] = nP(1-P)$

標準偏差: $D(X) = \sqrt{V(X)}$

となることが知られています。

この内容は、超重要です
これを知らないと、
統計検定2級の合格は
ほぼ無理です

正規分布
$$\boldsymbol{N(nP, nP(1-P))}$$
により近似可能

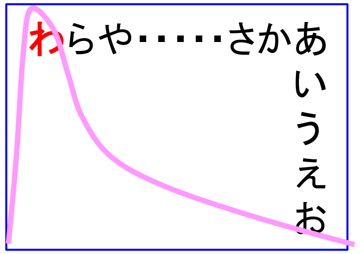
青玉が出る**回数**: $\boldsymbol{X \sim N(nP, nP(1-P))}$

n回中の青玉が出る**比率**: $\boldsymbol{\hat{P} = \frac{X}{n} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)}$ ← 問4で使った式

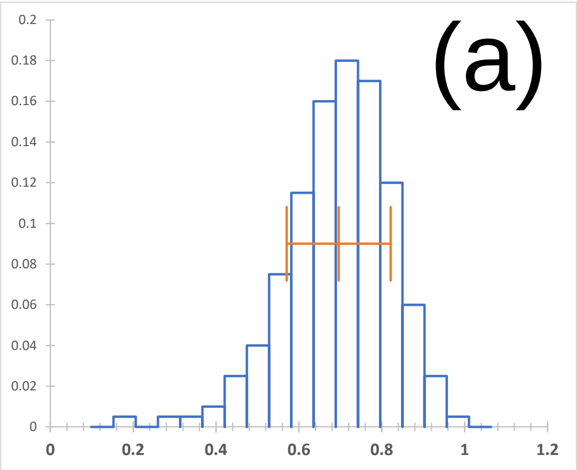
(p75.1)[C5]問6. 分布形と歪度(わいど)・尖度

(Bランク)

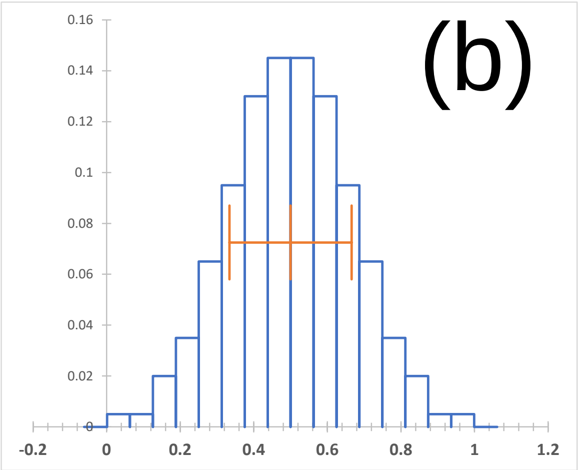
- 歪度:　分布の歪み(ゆがみ)具合
- 読み方:歪曲の歪(わい)
- 正規分布では、歪度＝0



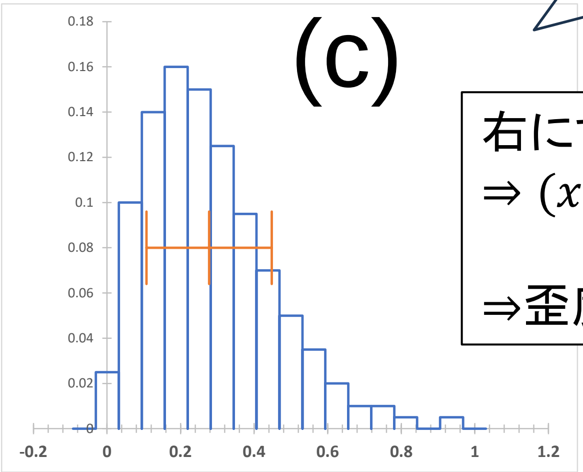
憶え方の例:
あいうえお表で
「わ」は左上にある
「わ」にかかる分布では
わいど(歪度)>0



歪度= -0.68



歪度= 0.00



歪度= 0.91

右にすそ有
⇒ $(x-\mu)^3$ × 密度
　　　が大きい
⇒歪度が正に大きい

左にすそ有
歪度< 0

基準:正規分布(対称)
歪度=0

右にすそ有
歪度>0

p75 の問題　Ⅰ:
~~「(c)右にすそ有⇒歪度は負」~~
~~「(a)左にすそ有⇒歪度は正」~~

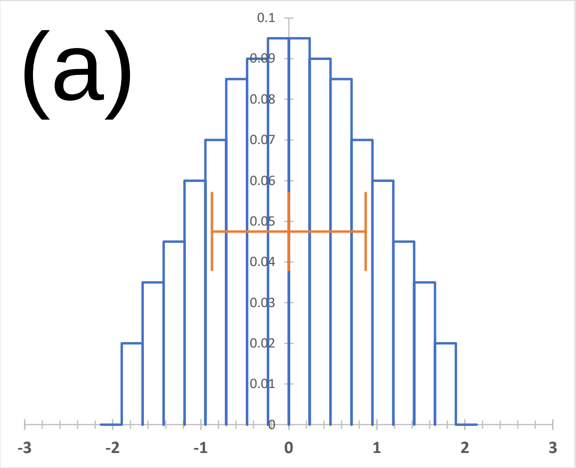
⇒Ⅰ :間違い

(p75.2)[C5]問6. 分布形と歪度・尖度(せんど)

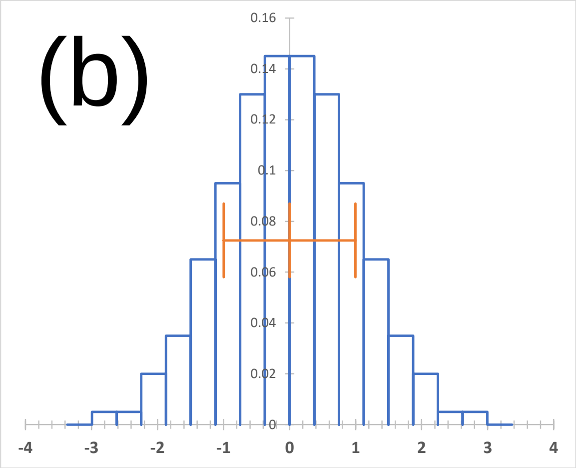
(Bランク)

- 尖度：　分布のとがりの程度
- 読み方：尖閣諸島の尖(せん)
- 正規分布では、尖度＝0
- 尖って(とがって)いると、尖度>0

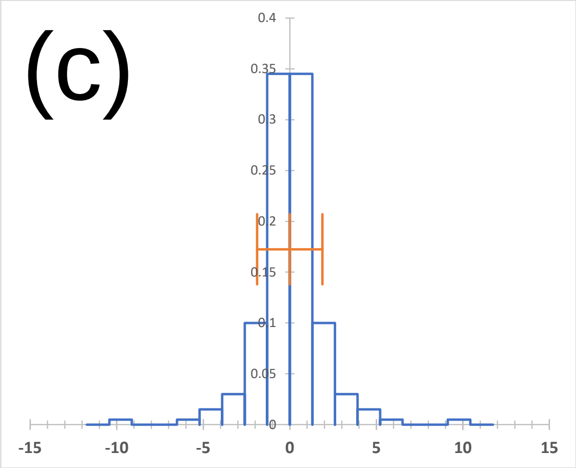
尖っている
⇒すそ部が大きい
⇒ $(x-\mu)^4$ × 密度
　　　　が大きい
⇒尖度が正に大きい



尖度= -0.76



尖度= 0.0



尖度= 7.52

p75 の問題:II
~~(a)では　尖度は正~~
~~(c)では　尖度は負~~

II　：間違い

ゆるやか
尖度< 0

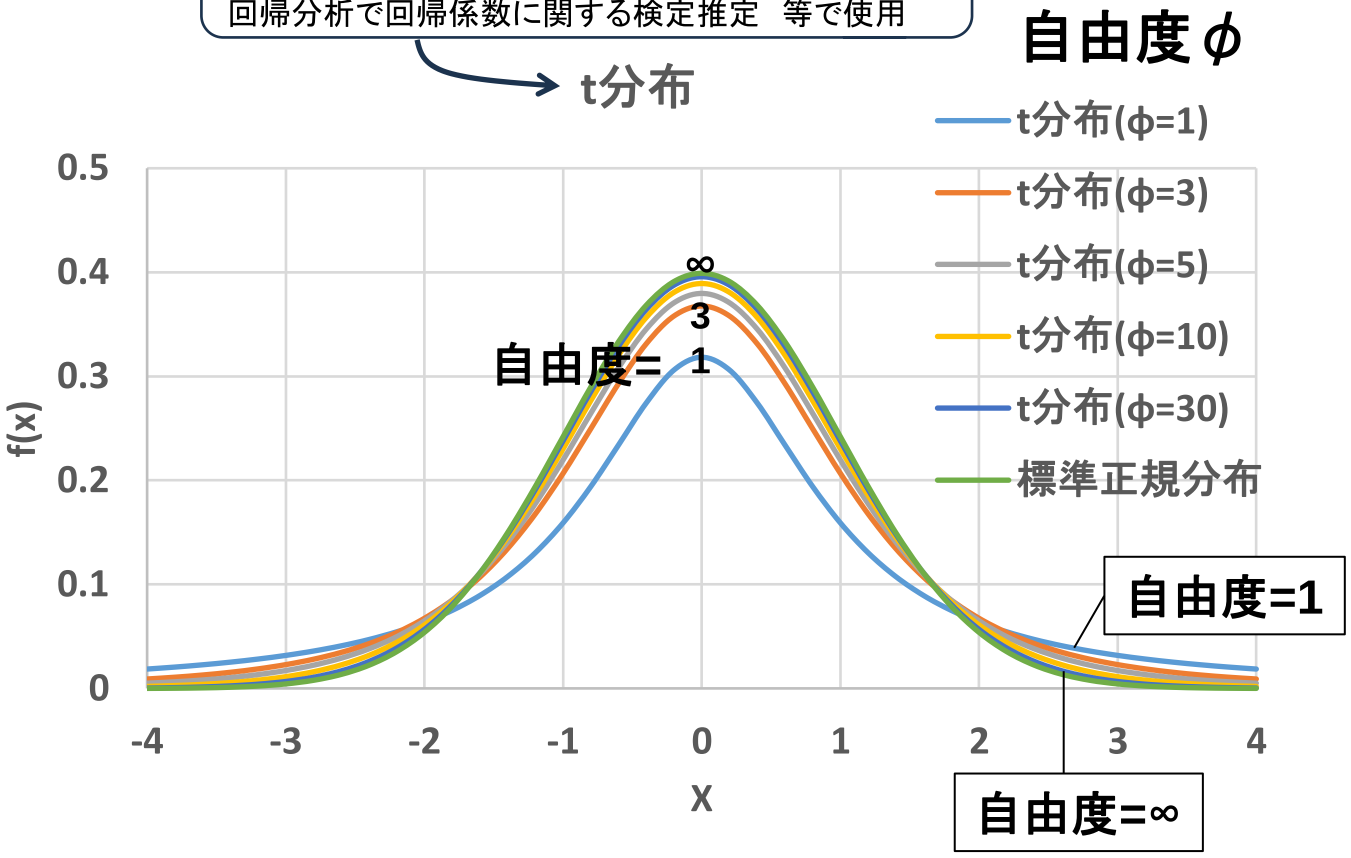
基準：正規分布
尖度=0

尖っている
尖度>0

(p75.3)[C5]問6. 分布形と歪度・尖度(せんど)

(Bランク)

母平均の検定推定(母分散が未知の場合)
母平均の差の検定推定
回帰分析で回帰係数に関する検定推定　等で使用



・t分布は正規分布に似たベル型
・t分布は自由度φに依存する
・左右対称⇒ φ >3 の時、歪度=0

自由度φが小さい時、すそ部の密度が大きい

自由度が大きくなると、
すそ部の密度が小さくなる
⇒尖度が小さくなる

自由度＝∞の時、
標準正規分布に一致する
⇒尖度=0となる

p75 の問題　III：
「t分布の尖度：
~~自由度が大きいほど~~
~~尖度の絶対値は~~
~~大きくなる」~~

III　：間違い

より高度な説明：
t分布の尖度は、自由度φ≧5で定義される
尖度=6/(φ-4)
φ=5,6,7,...∞の時、それぞれ尖度=6,3,2,...,0　となる
(CBT問題集p75の下から3行目。これはCランク)

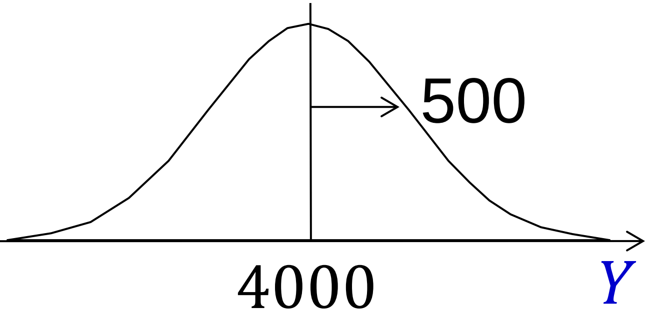
p75 の問題：
I, II, III　：すべて間違い　　⇒(答)⑤

済

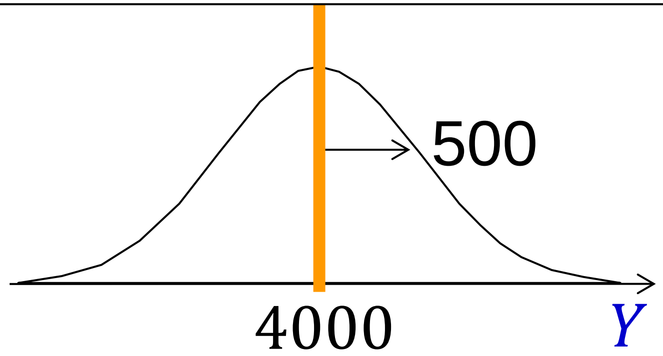
(p76.1)[C5]問7. X−Yの確率計算

(A～Bランク)

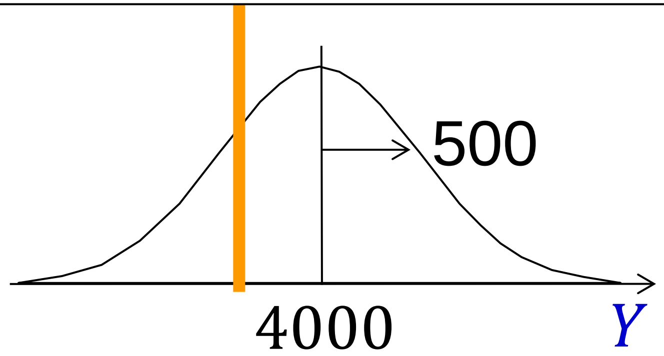
前の年　$Y \sim N(4000, 500^2)$



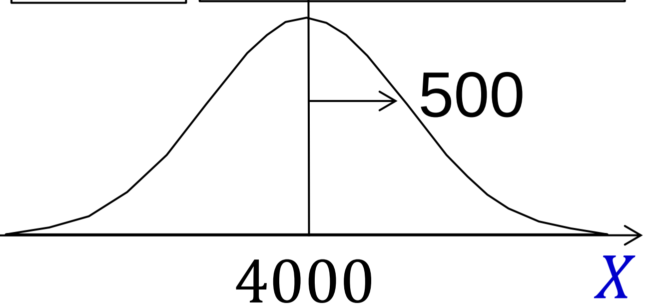
前の年の料金: (例)　Y=4000円の時、



前の年の料金: (例)Y=3600円の時、

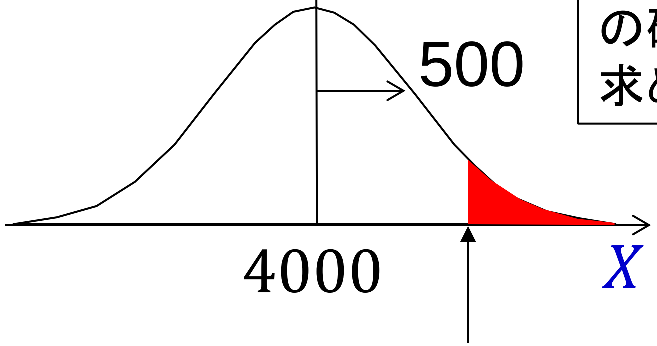


ある年　$X \sim N(4000, 500^2)$



ある年の料金: X≧4800となる場合

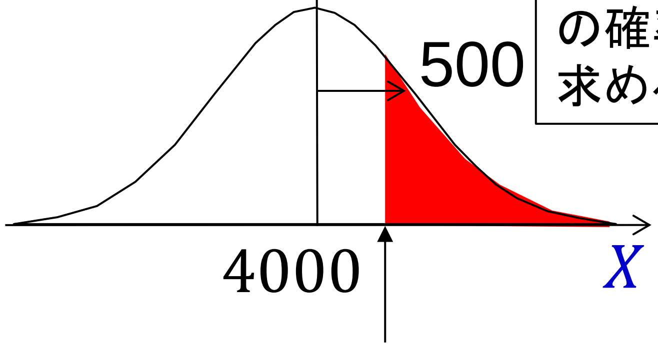
の確率を求める



X=4800

ある年の料金: X≧4400となる場合

の確率を求める



X=4400

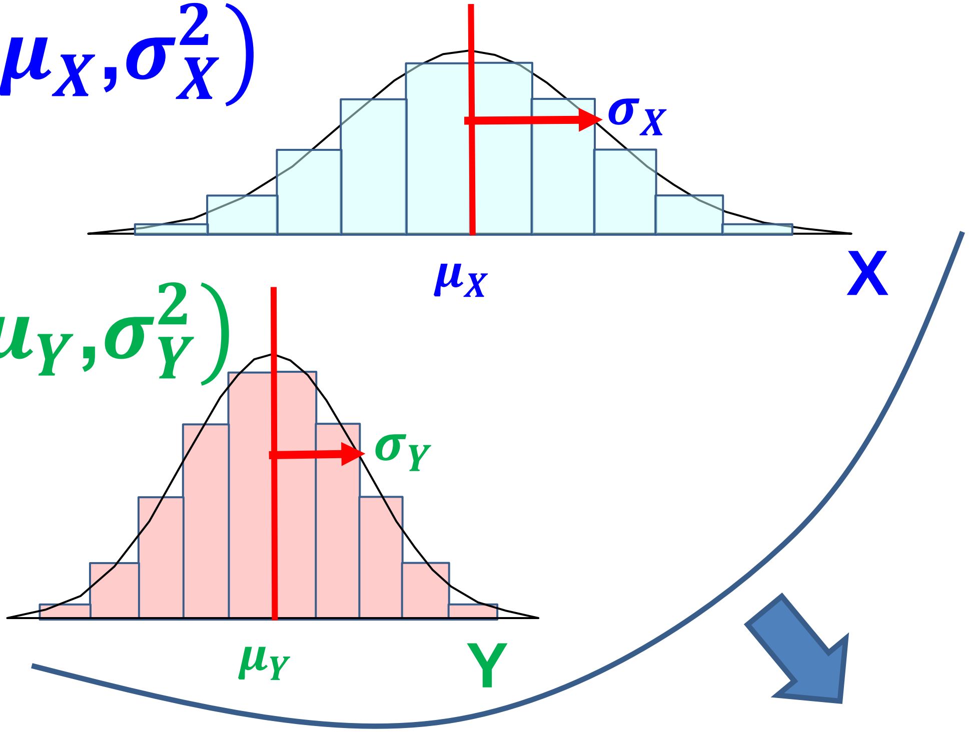
$X - Y \geq 800$となる確率は？

$X - Y$はどんな分布に従う？
$X - Y \geq 800$となる確率は？

(p76.2)[C5]問7. X−Yの確率計算: (公式)正規分布の再生性

$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$

$Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$



(公式)　正規分布の再生性

互いに独立な2つの確率変数X, Yが正規分布に従う時、

$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$、$Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$

$$Z = X + Y \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)$$

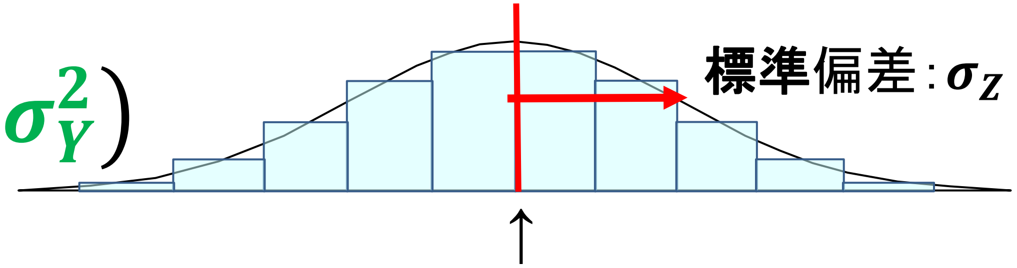
「平均を足し、分散を足せばよい」

$Z = X + Y$の分布は･･･

分散: $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

標準偏差: $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$

$$Z \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)$$



平均$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$

(p76.3)[C5]問7. X－Yの確率計算

(A～Bランク)

(公式)　正規分布の再生性

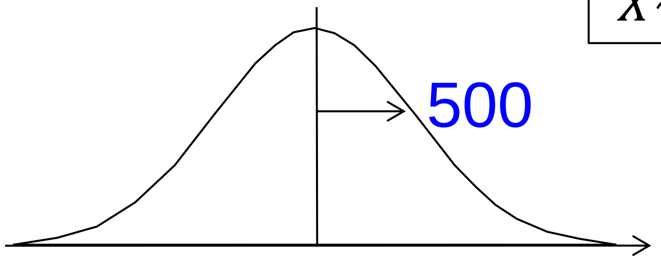
互いに独立な2つの確率変数X, Yが

$\boldsymbol{X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)}$、$\boldsymbol{Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)}$ **の時、**

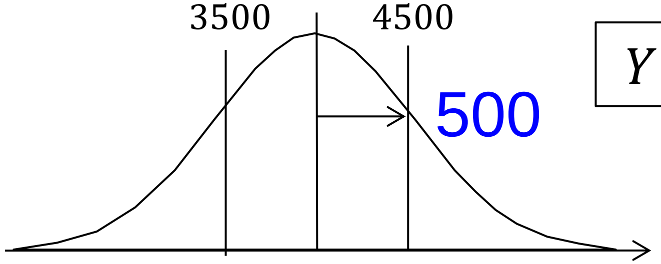
$$\boldsymbol{Z = X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}$$

$$\boldsymbol{aY + b \sim N(a\mu_Y + b,\ a^2\sigma_Y^2)}$$

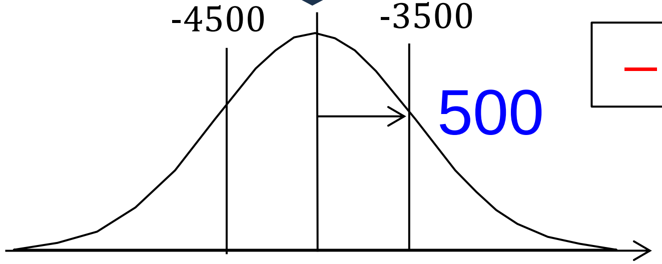
$X \sim N(4000, 500^2)$



$Y \sim N(4000, 500^2)$



$-Y \sim N(-4000, 500^2)$

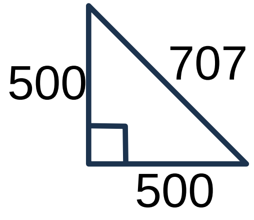


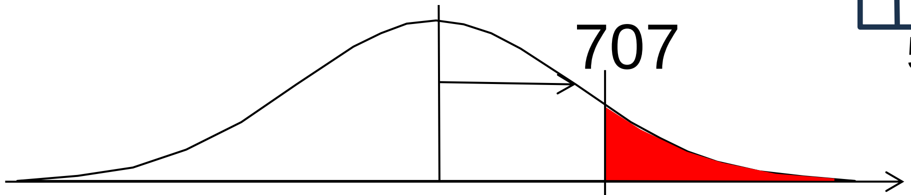
$X - Y$が従う分布は？

$Z = X - Y = X + (-Y) \sim N(\,0\,, 500^2 + 500^2)$

$500^2 \times 2 = \left(500\sqrt{2}\right)^2 = 707^2$

$Z = X - Y \sim N(0, 707^2)$



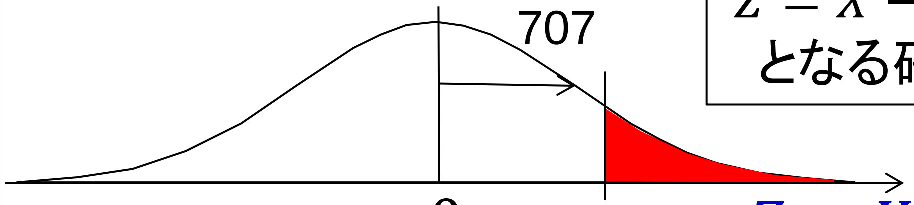


$Z = X - Y \geq 800$となる確率を求めればいい

(p76.4)[C5]問7. X−Yの確率計算

(A～Bランク)

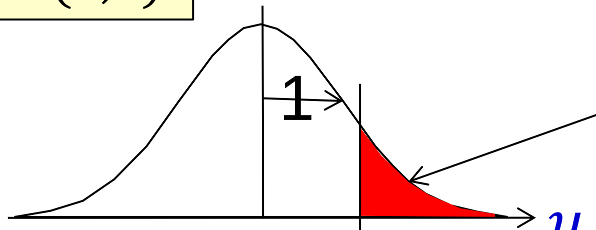
$Z = X - Y \sim N(0, 707^2)$



$Z = X - Y \geq 800$
となる確率は？

$u = \dfrac{Z}{707}$

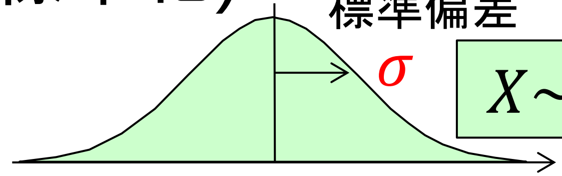
標準化: $u \sim N(0,1)$



この確率は？

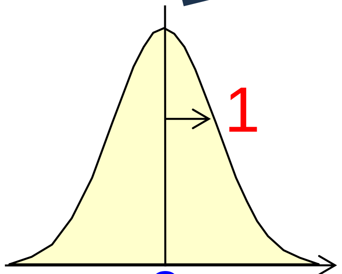
$$u = \frac{800}{707} = 1.13$$

公式(標準化)



$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$



$Z \sim N(0,1)$

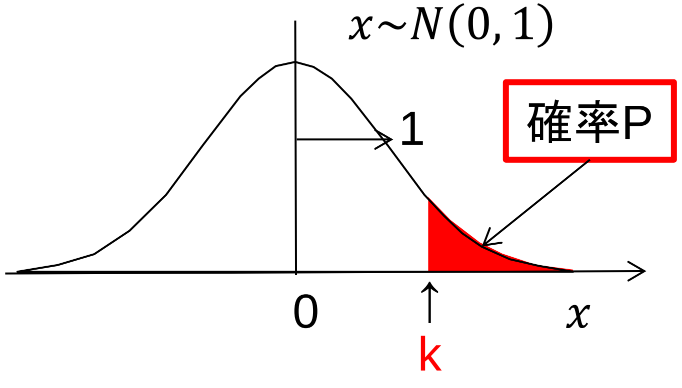
(公式)$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$の時、
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$と変換すると、$Y \sim N(0,1)$となる

(p76.5)[C5]問7. X－Yの確率計算

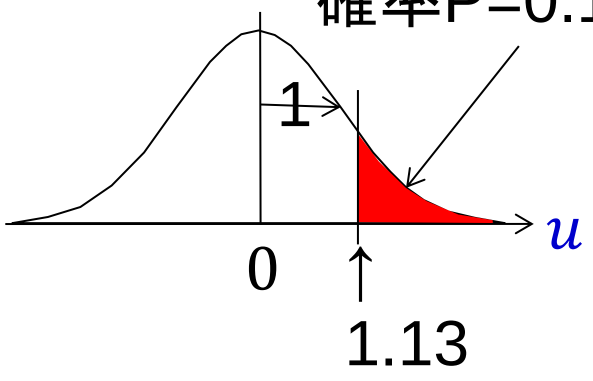
(A～Bランク)

p200　付表１
標準正規分布の上側確率

k=k1+k2	k2=	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
k1=	0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
	0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
	0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
	0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
	0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
	0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
	0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
	0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
	0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
	0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
	1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
	1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
	1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
	1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
	1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
	1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
	1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
	1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
	1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
	1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
	2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
	2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
	2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
	2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
	2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
	2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048



確率P=0.1292

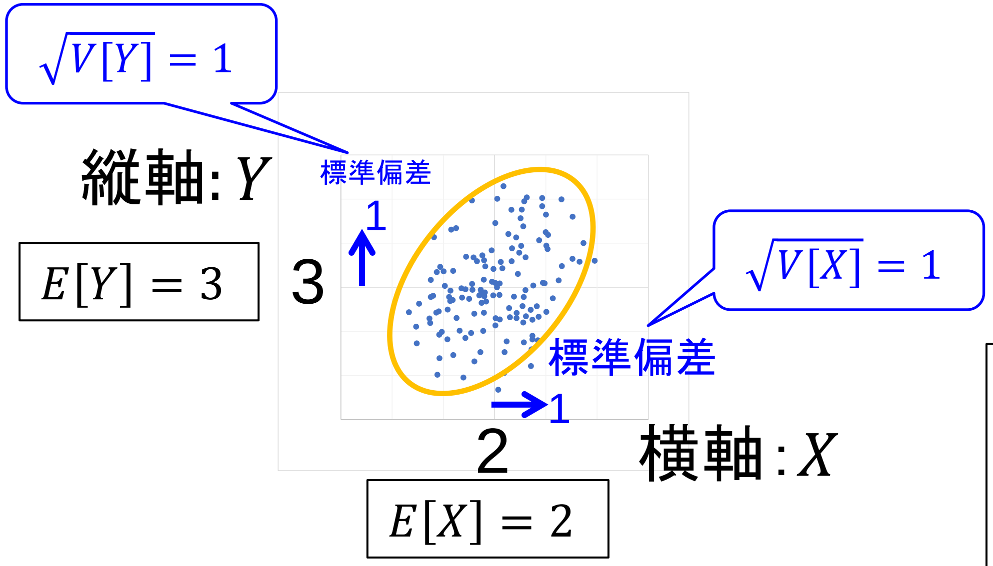


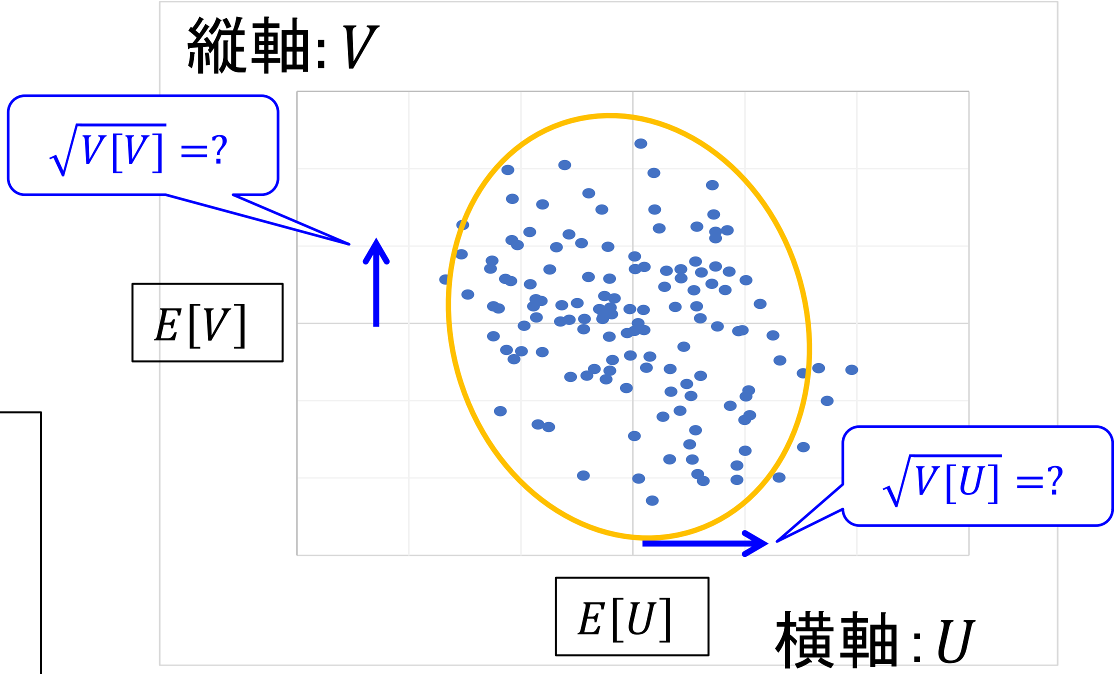
済

確率P=0.1292　(答)③

(p77.1)[C5]問8. 線形な変数変換、共分散、相関係数 (Bランク)

問題で聞かれていることは、





変数変換
$U = 3X - 2$
$V = -2Y - 4$
をした時、

共分散　$\mathrm{Cov}[X, Y] =$ ●
相関係数　$r[X, Y] =$ ■
(●、■はある値)

共分散　$\mathrm{Cov}[U, V] =$ ？
相関係数　$r[U, V] =$ ？
はどうなるでしょうか？

(p77.2)[C5]問8. 線形な変数変換、共分散、相関係数：公式

確率変数の平均、分散、共分散、相関係数の公式：

(1) Xの平均：$E(X)$,　　(2) Yの平均：$E(Y)$

(3) Xの分散：　$V[X]=E\left[(X-E[X])^2\right]=E\left[X^2\right]-(E[X])^2$

(4) Yの分散：　$V[Y]=E\left[(Y-E[Y])^2\right]=E\left[Y^2\right]-(E[Y])^2$

(5) X,Yの共分散：　$Cov[X,Y]=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

(6) X,Yの相関係数：　$r[X,Y]=\dfrac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$

確率変数を変数変換した時の共分散・相関係数の公式

変換式	（変換前）	$U=aX+b\ (a,c\neq 0)$ $V=cY+d$
共分散	$Cov[X,Y]$ とすると	(7)　$Cov[U,V]=ac\ \times Cov[X,Y]$
相関係数	$r[X,Y]$ とすると	(8)　$ac>0$なら、　$r[U,V]=r[X,Y]$ $ac<0$なら、　$r[U,V]=-r[X,Y]$

(p77.3)[C5]問8. 線形な変数変換、共分散、相関係数 (Bランク)

$(1)E[X] = 2,$　　$(2)\ E[Y] = 3$
$(3)V[X] = 1,$　　$(4)\ V[Y] = 1$
$E[XY] = 6.3$
Q: X, Yの共分散、相関係数は?

変数変換
$U = 3X - 2$
$V = -2Y - 4$　をした時、
Q: U, Vの共分散、相関係数は？

$U = aX + b \quad \Rightarrow a = 3$
$V = cY + d \quad \Rightarrow c = -2$

(5)　X, Yの共分散:
$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
$= 6.3 - 2 \times 3 = 0.3$

(6)　X, Yの相関係数:

$$r[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \frac{0.3}{\sqrt{1 \times 1}} = 0.3$$

(7)　U, Vの共分散:

$$Cov[U, V] = ac \times Cov[X, Y] = 3 \times (-2) \times 0.3 = -1.8$$

$ac = -6 < 0$ なので
(8)　U, Vの相関係数: $r[U, V] = -r[X, Y] = -0.3$

(答)④

済

$(5)X, Y$の共分散:
$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$
(6)　X, Yの相関係数:　$r[X, Y] = \dfrac{Cov[X, Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$

可能なら、憶えてください

変換式	（変換前）	$U = aX + b\ (a, c \neq 0)$ $V = cY + d$
共分散	$Cov[X, Y]$	(7)　$Cov[U, V] = ac \times Cov[X, Y]$
相関係数	$r[X, Y]$	(8)　$ac > 0$なら、　$r[U, V] = r[X, Y]$ $ac < 0$なら、　$r[U, V] = -r[X, Y]$

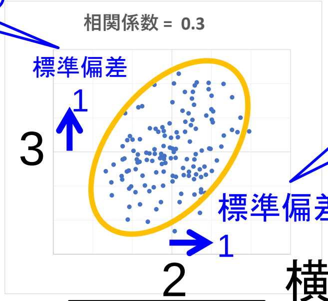
(p77.4)[C5]問8. 線形な変数変換、共分散、相関係数

振り返り

$\sqrt{V[Y]} = 1$

縦軸: Y

$E[Y] = 3$



$\sqrt{V[X]} = 1$

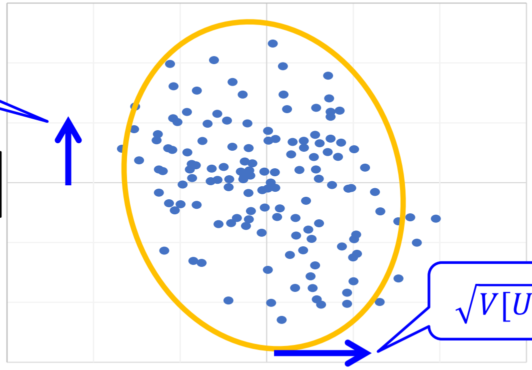
横軸: X

$E[X] = 2$

縦軸: V

$\sqrt{V[V]} = 2$

$E[V]$



$\sqrt{V[U]} = 3$

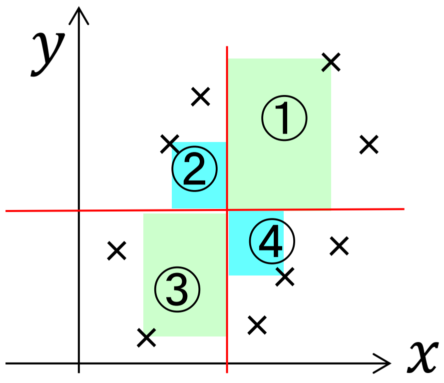
$E[U]$

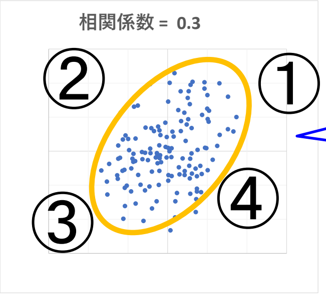
横軸: U

変数変換
$U = 3X - 2$
$V = -2Y - 4$
をした時、

共分散　$\mathrm{Cov}[X, Y] = 0.3$
相関係数　$r[X, Y] = 0.3$

共分散　$\mathrm{Cov}[U, V] = -1.8$
相関係数　$r[U, V] = -0.3$
となりました。





共分散は、「各点毎の面積の差（①＋③　－②－④）」
みたいなものです
変数変換により、 $3 \times (-2) = -6$倍になりました。

変数変換により、
弱い正の相関⇒弱い負の相関　になりました