ひかり統計塾

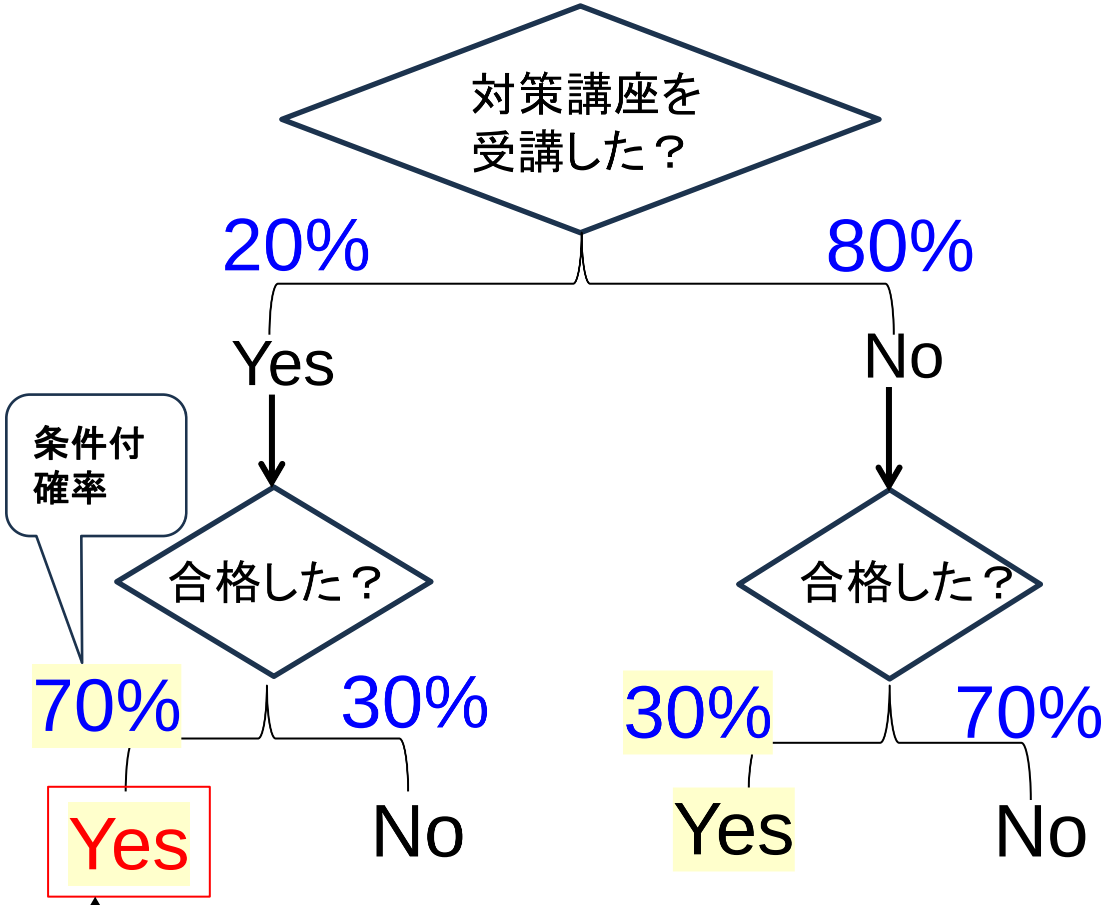
統計検定２級
公式問題集(CBT対応版)の解説
カテゴリー4（p58-65）
確率の分野

統計検定2級　CBT問題集　PART.2 目次

[C4]
[CATEGORY.4]
確率の分野

(p58.1)[C4]問1. 積事象の確率

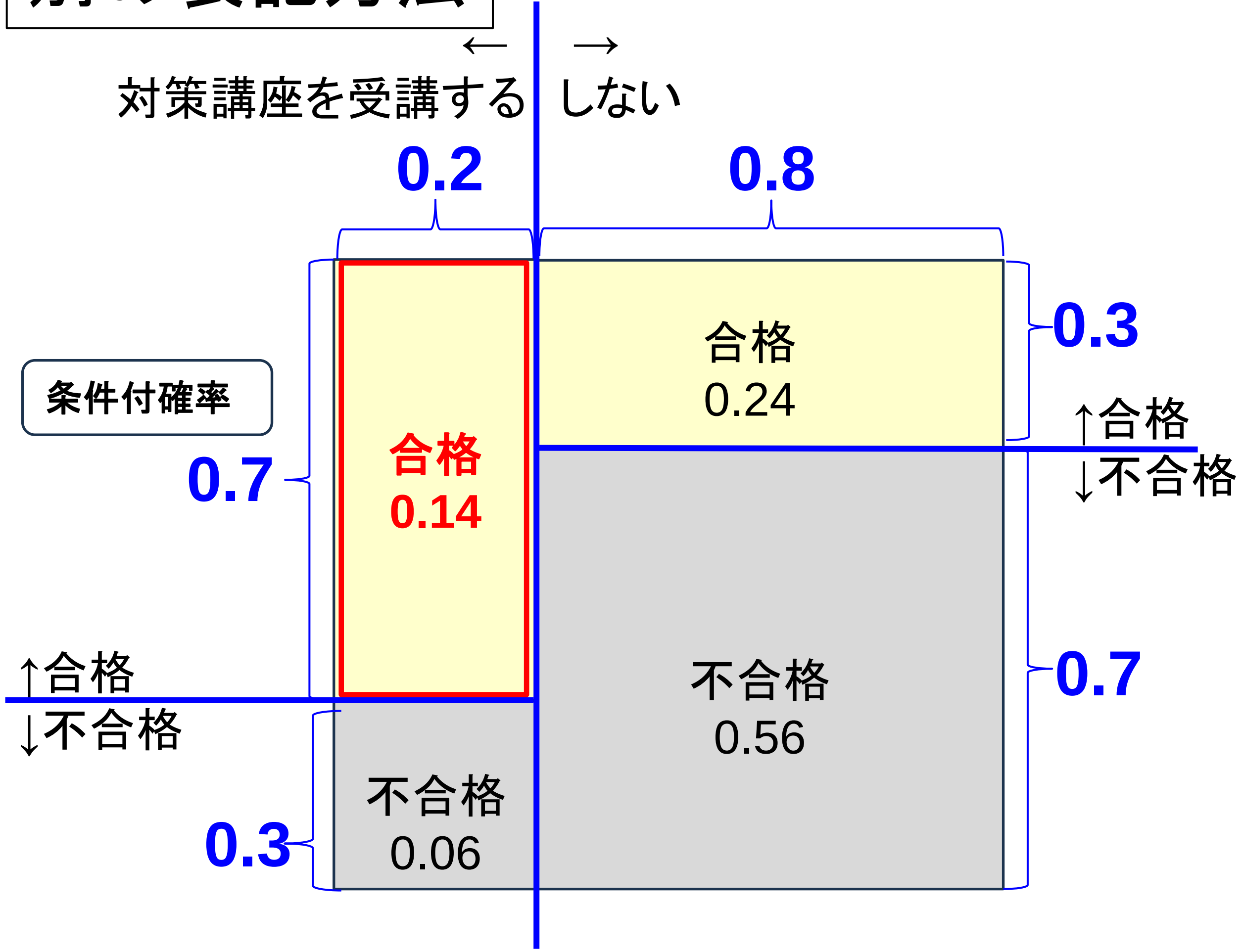
(Aランク)



この全体での割合(確率)は

$$0.2 \times 0.7 = 0.14$$

別の表記方法



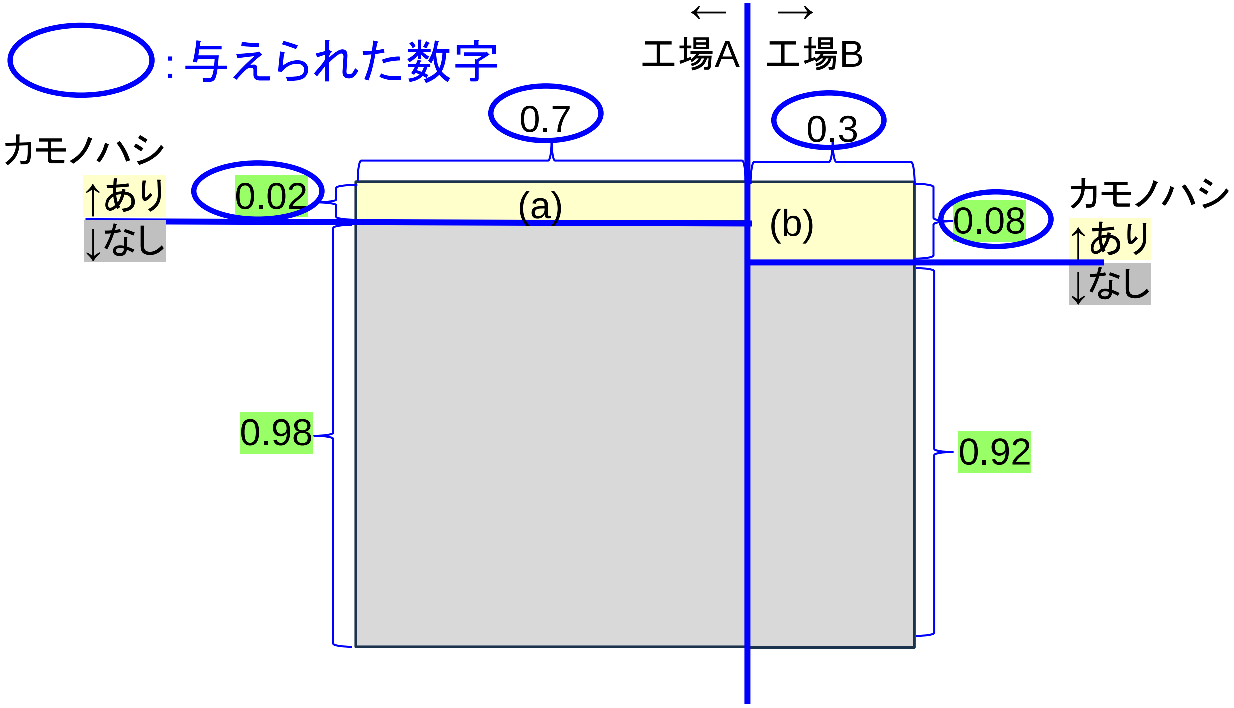
⇒(答)①

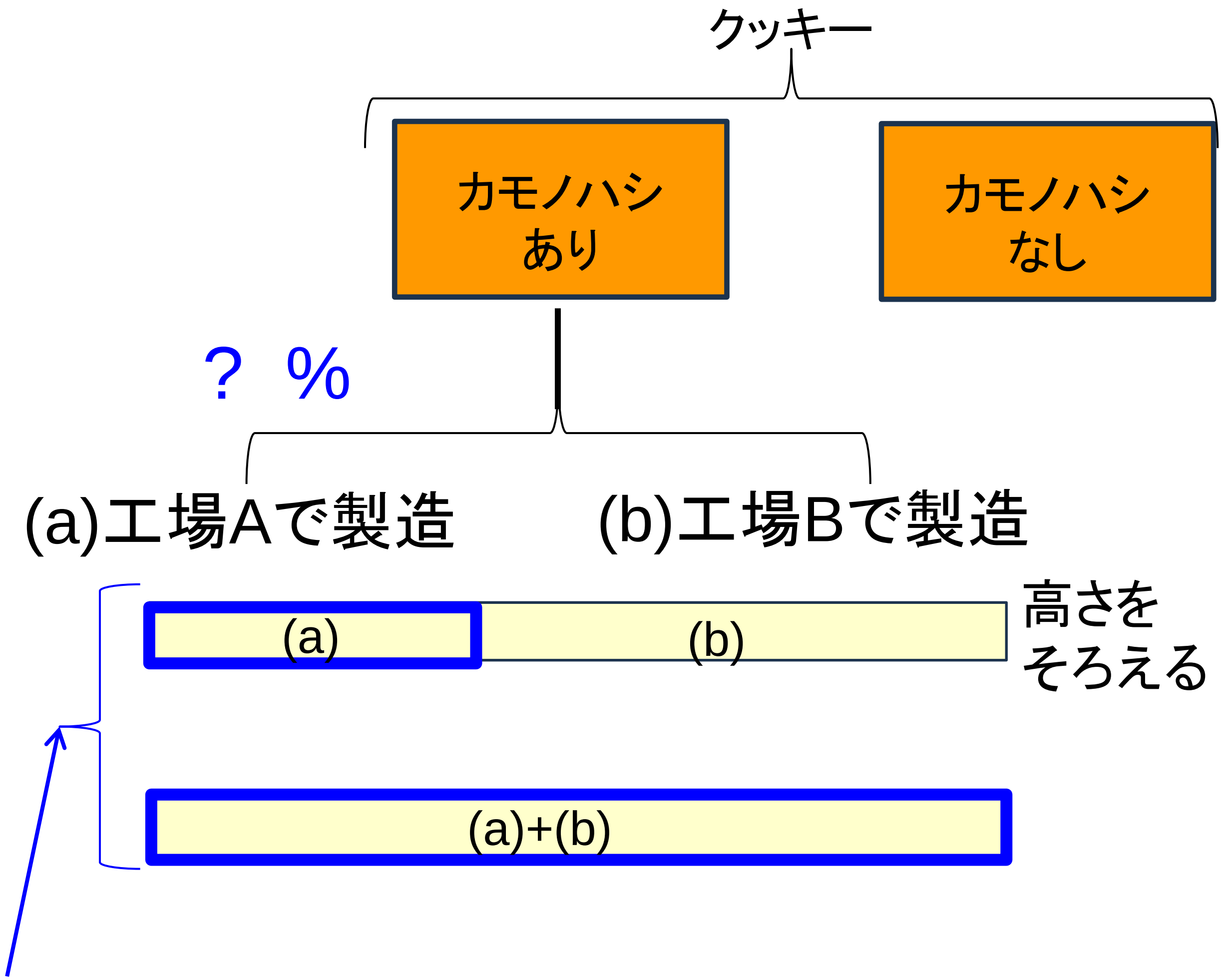
済

(p59.1)[C4]問2. ベイズの定理

(Aランク)

一辺の長さが1の
正方形を考えます





緑色の数字は
条件付確率です

知りたいこと:
カモノハシありのクッキーが
工場Aで製造された割合(確率)

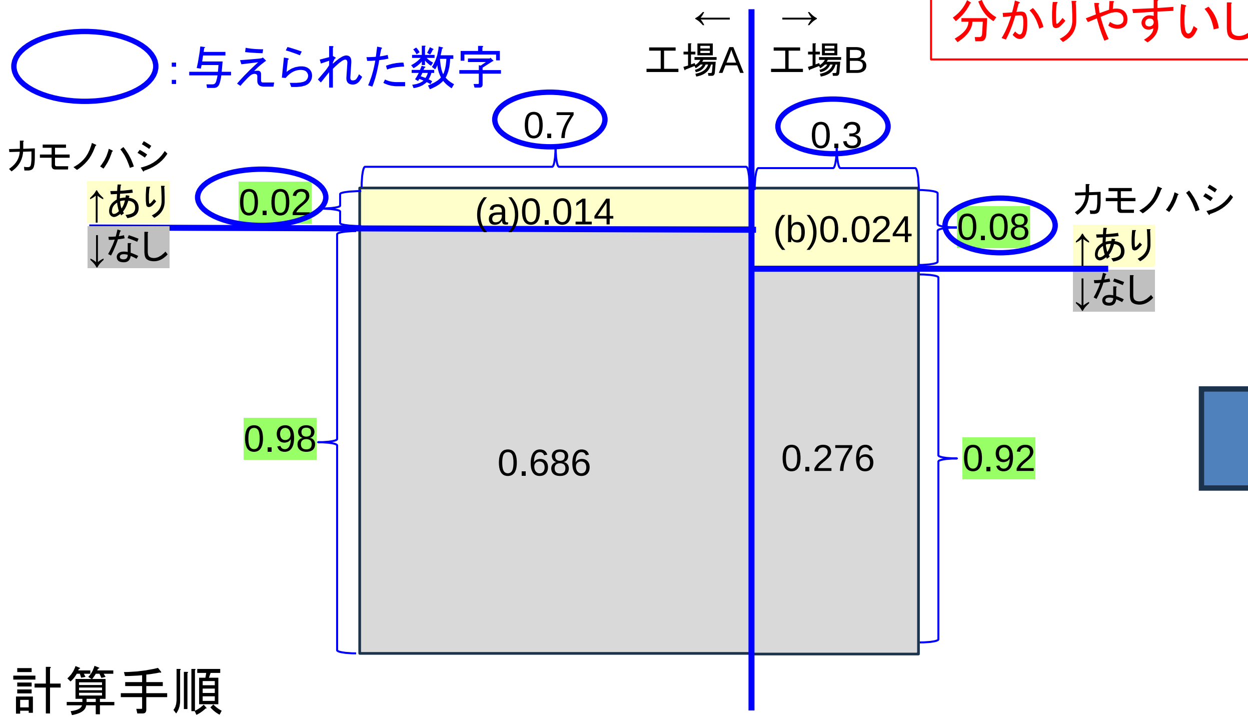
(p59.2)[C4]問2. ベイズの定理

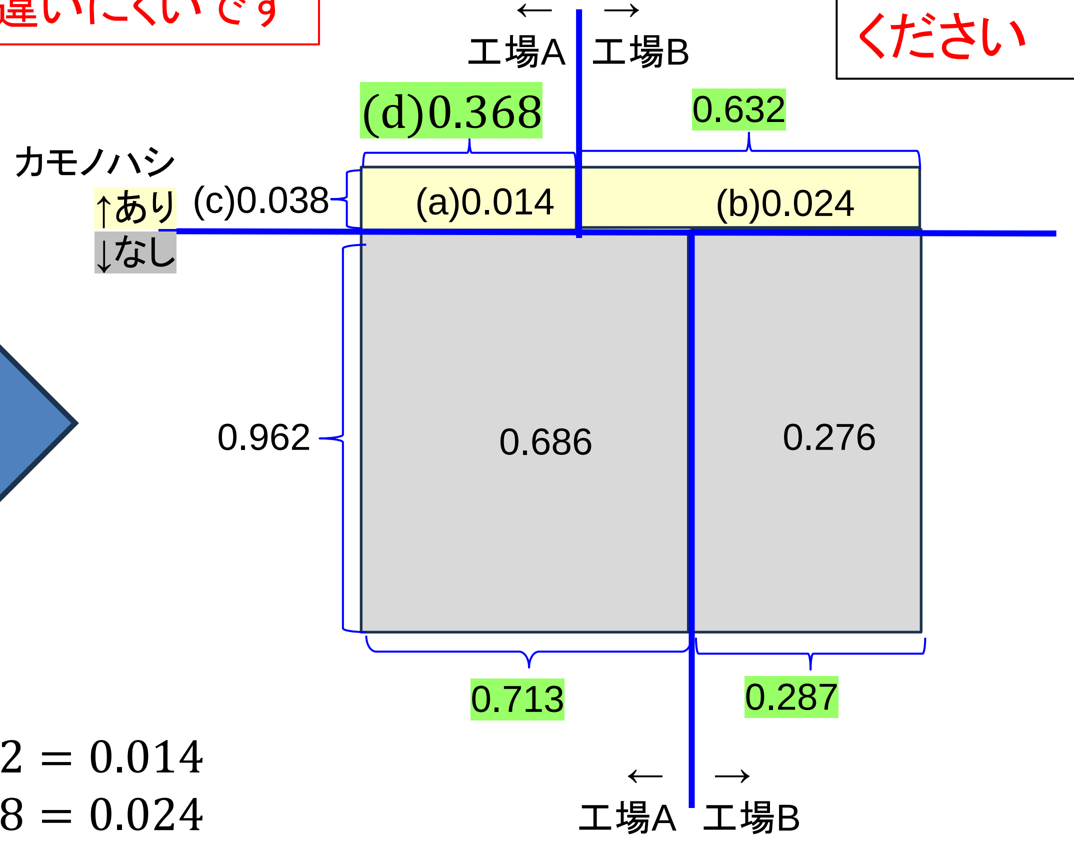
(Aランク)

★よく出ます
マスターしてください

一辺の長さが1の正方形を考えます

「式」よりも「図」で考えた方が
分かりやすいし、間違いにくいです





計算手順

(a)全体の中で、工場Aで作られたカモノハシありの確率: $0.7 \times 0.02 = 0.014$

(b)全体の中で、工場Bで作られたカモノハシありの確率: $0.3 \times 0.08 = 0.024$

(c)全体の中で、カモノハシありの確率: $(c) = (a) + (b)$　　$0.014 + 0.024 = 0.038$

(d)カモノハシありの中で、工場Aで作られた確率: $(d)=(a)/(c)$　　$0.014/0.038=0.368$

緑色の数字は
条件付確率です

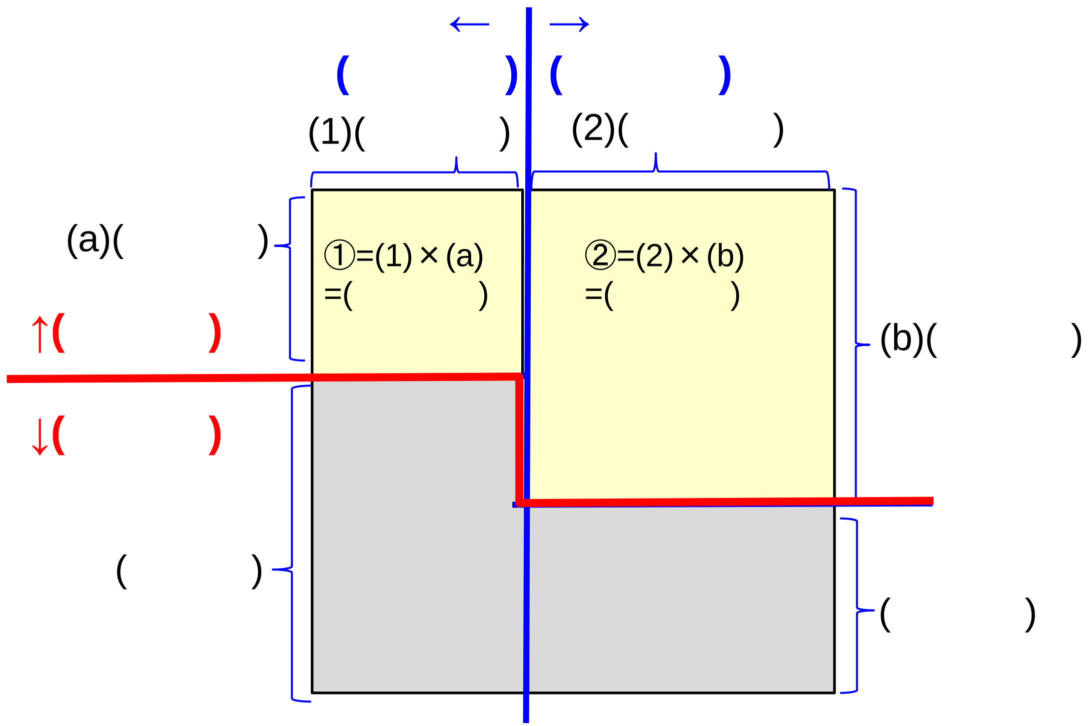
条件付確率を求めるには、上のような作図をして、
該当する辺の長さ(d)を求めるといいです。

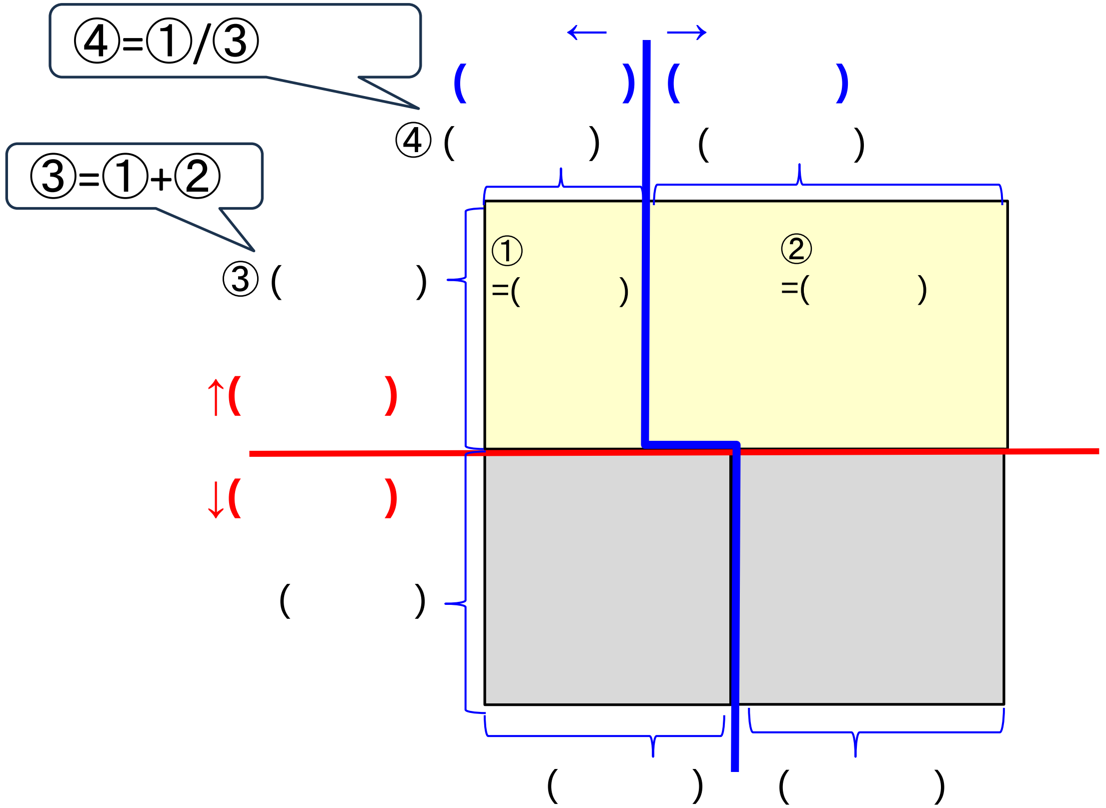
⇒(答)②

済

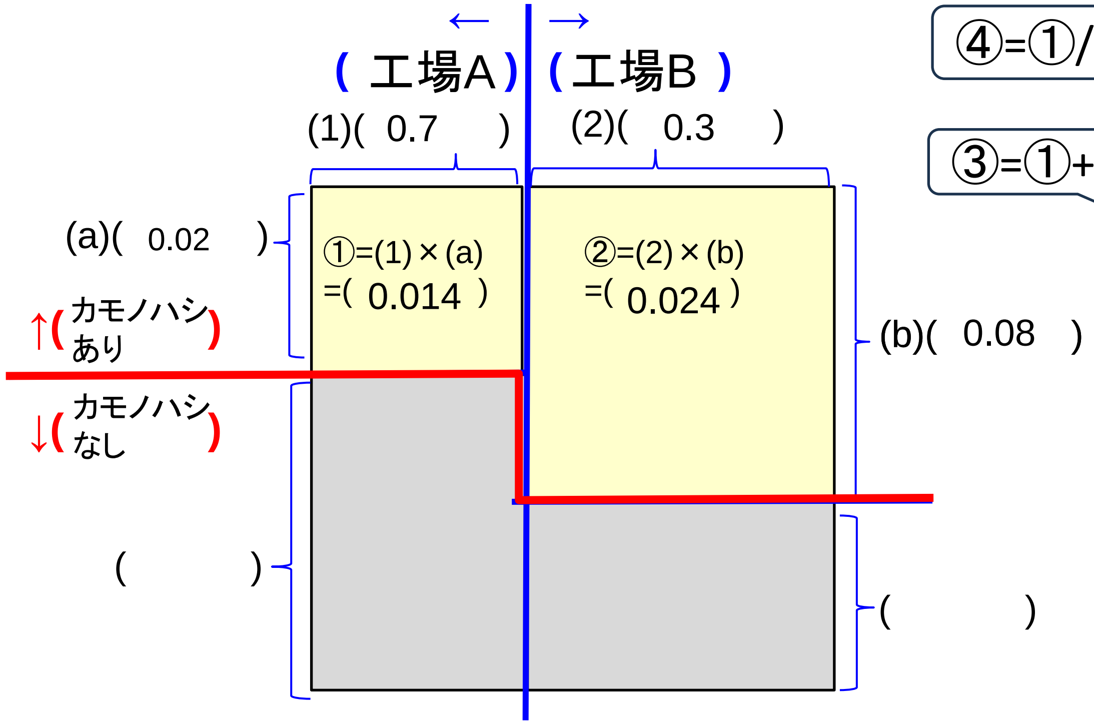
(p59.3)[C4]問2. ベイズの定理の問題用計算シート

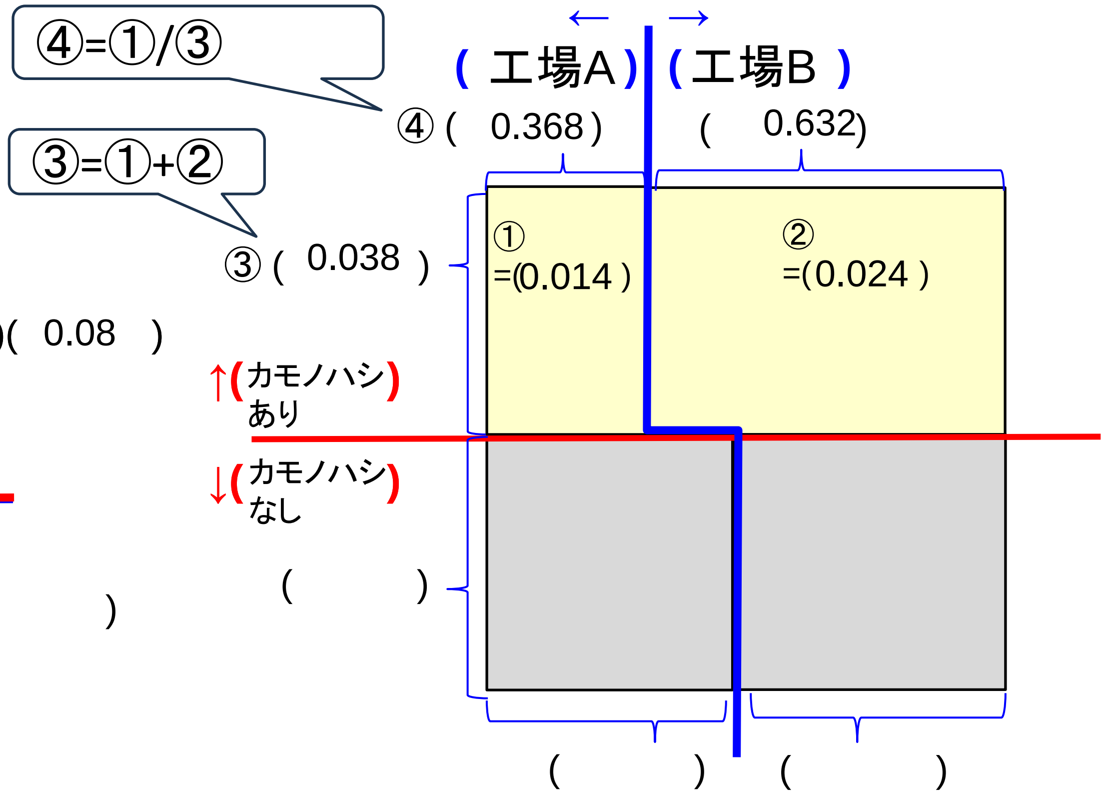
もちろん、各数値により図の形・サイズは変わりますが、このシートではそこまで対応不可な点を、ご了承ください。ご注意ください。



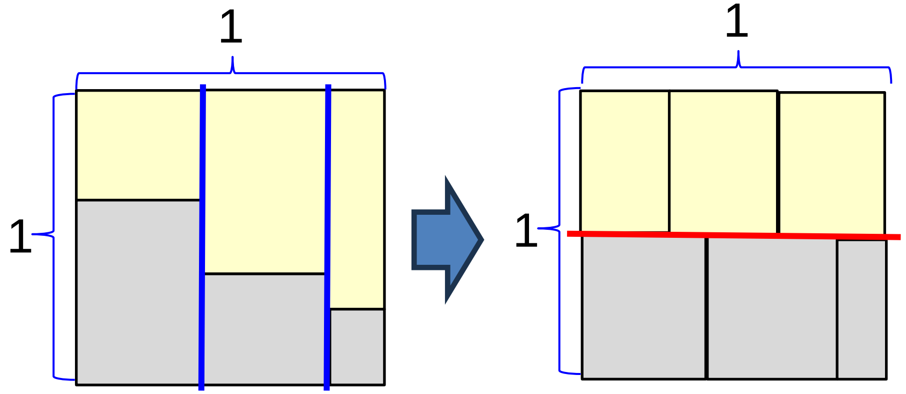


(p59.4)[C4]問2. ベイズの定理の問題用計算シート(例)





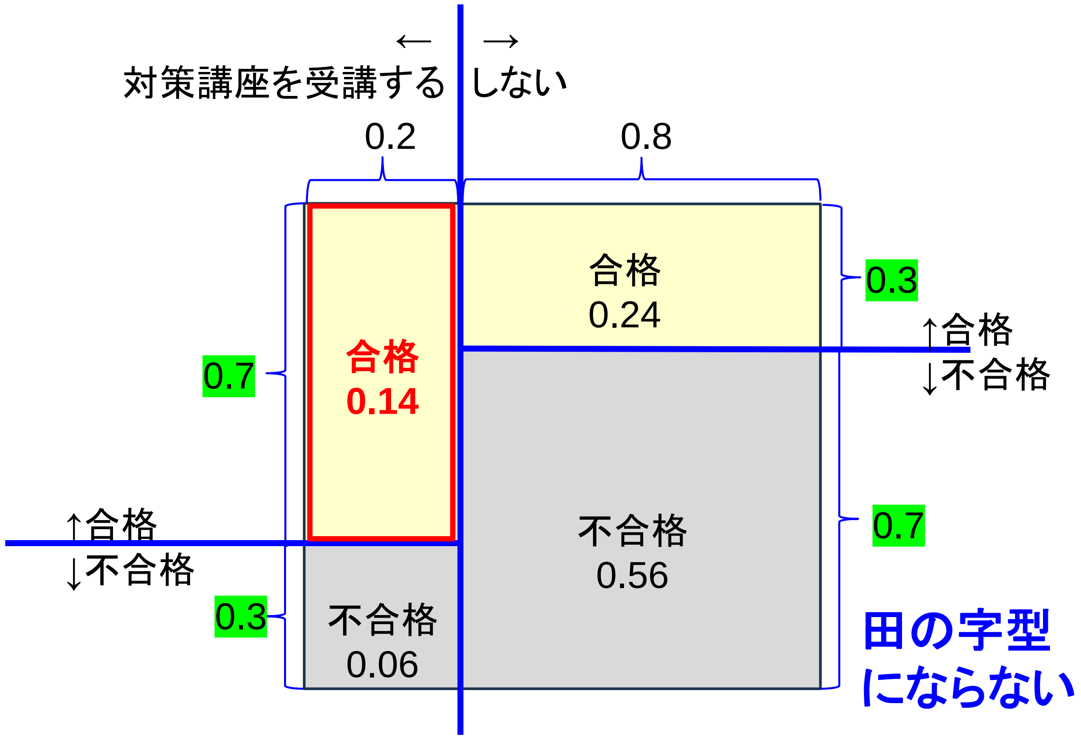
(例)2級過去問2017年6月問7
(漁港X,Y,Z)でとれた貝で(規格内・規格外)の貝に関する問題
もしも、(1),(2)以外に(3),…があったら、
②=(2)×(b)と同様に、②'=(3)×(c)、…も計算し、
③=①+②+②'+…を計算し、④=①/③を求めるといいです。

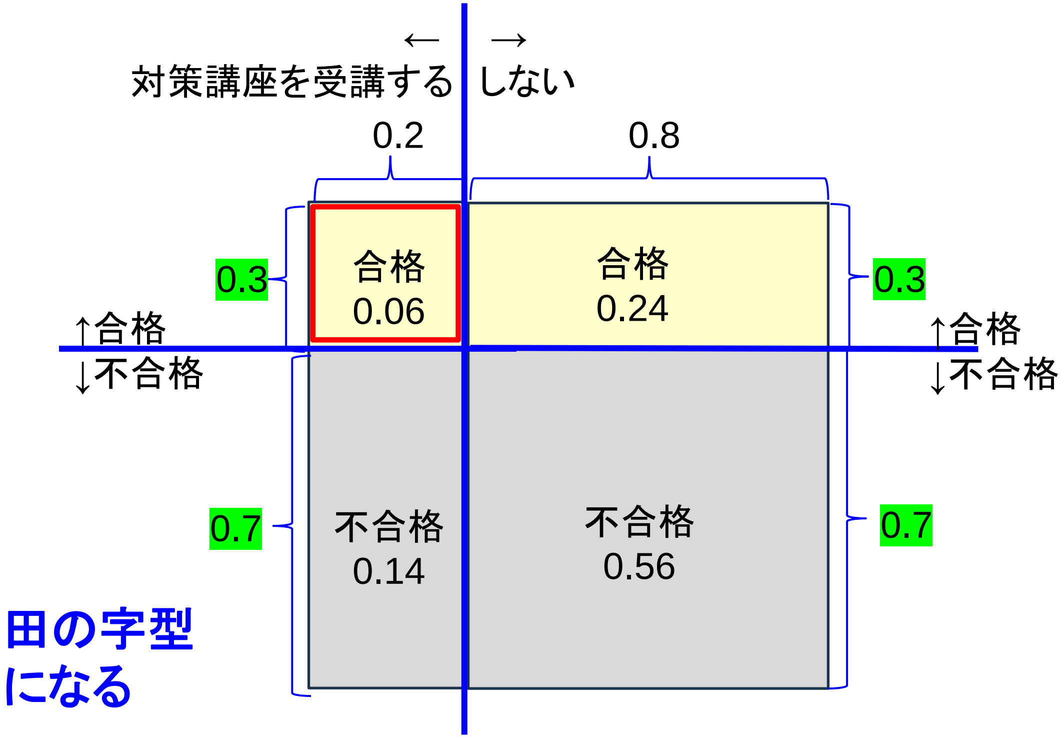


(p59.5) (脱線)「独立」について

A塾の対策講座の受講の有無と
試験の合否の割合(確率)は以下の通りと仮定

B塾の対策講座の受講の有無と
試験の合否の割合(確率)は以下の通りと仮定





A塾の対策講座の受講の有無と
試験の合否には、関係がありますか？

0.14+0.24=0.38

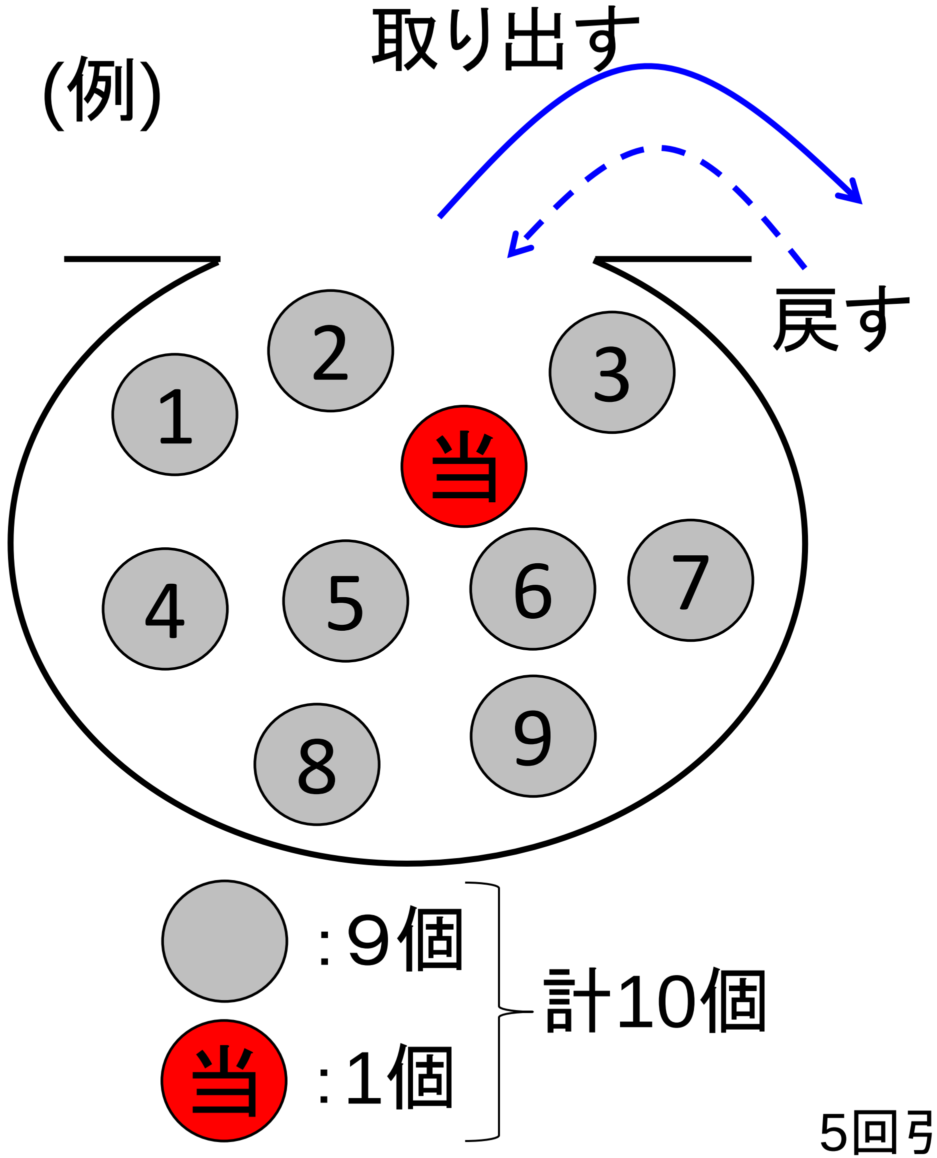
⇒関係ある。受講すると、合格しやすい
「A塾の対策講座の受講の有無」と「合否」は独立でない
P(受講後合格) $\neq$ P(受講) $\times$ P(合格) (0.14 $\neq$ 0.2 $\times$ 0.38=0.076)

B塾の対策講座の受講の有無と
試験の合否には、関係がありますか？

⇒関係ない。受講しても、合格のしやすさは変わらない
「B塾の対策講座の受講の有無」と「合否」は独立である
P(受講後合格) $=$ P(受講) $\times$ P(合格) (0.06=0.2 $\times$ 0.3)が成立

(p60.1)[C4]問3. 条件付き期待値

(B～Cランク)



当たりの確率: $p = 0.1$

外れ　の確率: $q = 1 - p = 0.9$

Q1. 1回目は外れでした
⇒ 2回目、当たる確率は？　　0.1 ですね

Q2. 1回目は当たりでした
⇒ 2回目、当たる確率は？　　0.1 ですね

Q3. 5回連続で外れました
⇒ 6回目、当たりやすくなる？　　No ですね

5回引いて、すべて外れだった。⇒6回目以降には影響しない。無視できる

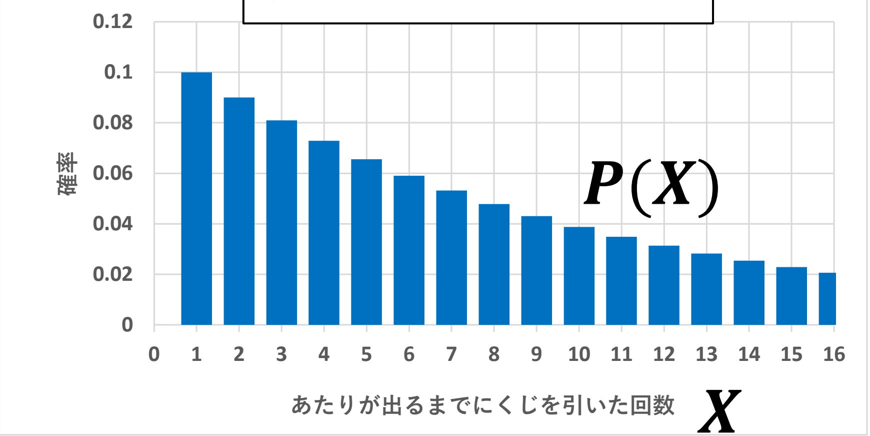
(p60.2)[C4]問3. 条件付き期待値

(B～Cランク)

あたり(●)が出る確率:$p = 0.1$
はずれ(×)が出る確率:$q = 1 - p = 0.9$

	各回のくじの結果	確率:P(X)	くじを引いた回数(X)
1回目で当たる	●	$p = 0.1$	1
2回目で当たる	×●	$qp = 0.09$	2
3回目で当たる	××●	$q^2p = 0.081$	3
・・・	・・・	・・・	・・・
k回目で当たる	×××・・・×● (但し、×がk-1個)	$q^{k-1}p$ $= 0.9^{k-1} \times 0.1$	k
・・・	・・・	・・・	・・・

幾何分布



離散型確率分布において、期待値を求める公式

Xの期待値($Expectation$):
$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

あたりが出るまでにくじを引いた回数(X)・・・幾何分布に従う
⇒Xの期待値は？

$$E(X) = 1 \times p + 2 \times qp + 3 \times q^2 p + \cdots + k \times q^{k-1} p + \cdots$$

幾何分布に従う確率変数の期待値:$E(X) = \dfrac{1}{p}$となることが知られています

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$$
10回⇒(答)②

済

(p60.3)(補足)幾何分布に従う確率変数の期待値：$E(X)=\frac{1}{p}$の証明 (B～Cランク)

$$E(X)=1\times p+2\times qp+3\times q^2p+\cdots+k\times q^{k-1}p+\cdots=\frac{1}{p}\text{の証明}$$

気になる方のみご覧ください

$E(X)=p\left(1+2q+3q^2+\cdots+kq^{k-1}+\cdots\right)$

$p=1-q$に注意して、

$E(X)=(1-q)\left(1+2q+3q^2+\cdots+kq^{k-1}+\cdots\right)$

$=\left(1+2q+3q^2+\cdots+kq^{k-1}+\cdots\right)-\left(q+2q^2+\cdots+(k-1)q^{k-1}+\cdots\right)$

$=1+q+q^2+\cdots+q^{k-1}+\cdots$

初項1、公比$q=0.9$ $(|q|<1)$の無限等比数列の和(高校の数IIIで学習)

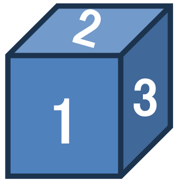
$=\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{p}$

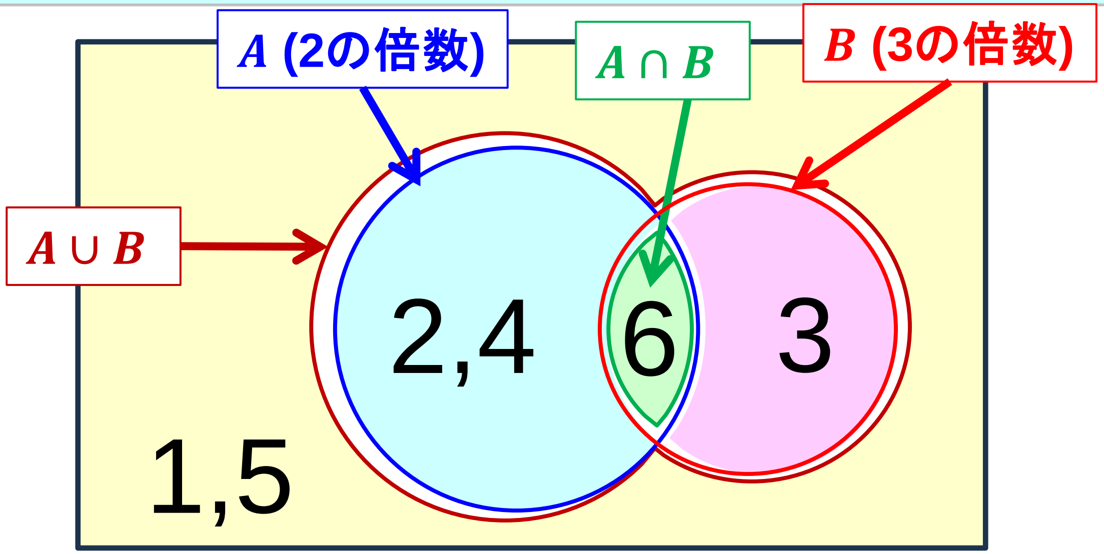
$E(X)=\dfrac{1}{p}$ ← 幾何分布に従う確率変数の期待値は $\dfrac{1}{p}$ となります

(p61.1)[C4]問4. 事象間の排反・独立

$p(A) = 0.4$
$p(B) = 0.35$
$p(A \cup B) = 0.61$

って何？
意味がわからん、
という方が
おられたら・・・





サイコロ投げを考えてみましょう
・1〜6の目が、等確率で出る
・1回投げた時に出た目をxとします

事象A: xは2の倍数
事象B: xは3の倍数　　とします。

A={2,4,6}	$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
B={3,6}	$p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$A \cup B$ ={2,3,4,6}	$p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
A∩B={6}	$p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

こんな例を
イメージして
ください

(p61.2)[C4]問4. 事象間の排反・独立

(Bランク)

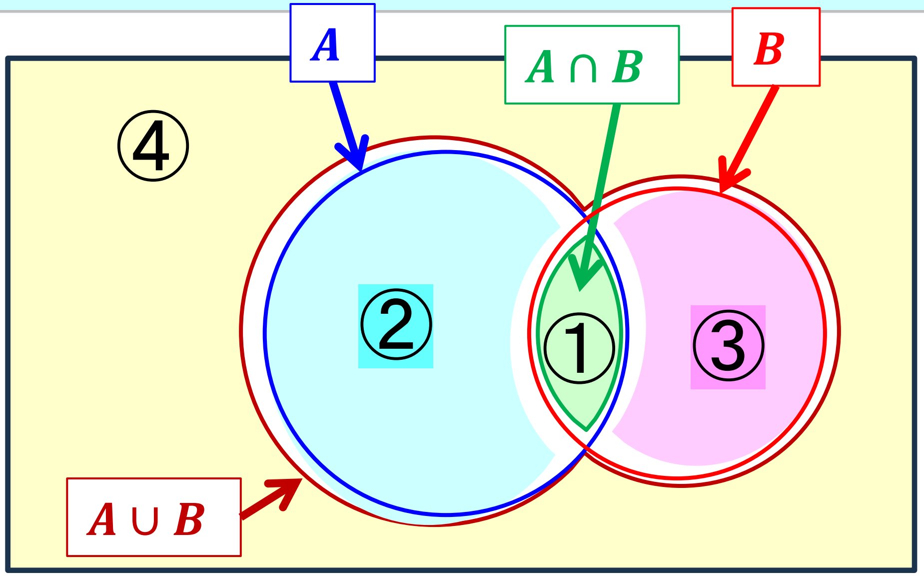
$p(A) = p(①)+p(②) = 0.4$
$p(B) = p(①)+p(③) = 0.35$
$p(A \cup B) = \boxed{p(①)+p(②)+p(③) = 0.61}$
Q: $p(①), p(②), p(③)$は？

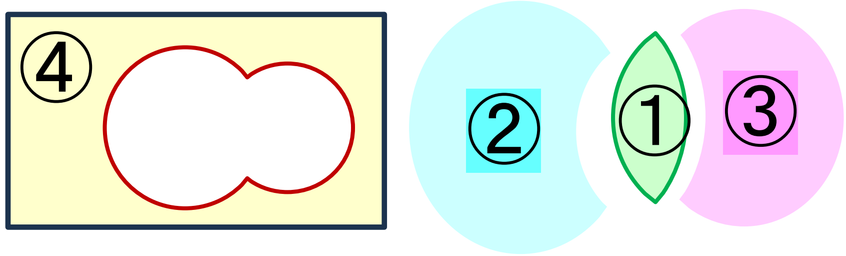
$p(A) + p(B)$
$= (p(①)+\boxed{p(②))+(p(①)+p(③))}= 0.75$

$\Rightarrow p(A \cap B) = p(①) = 0.75 - 0.61 = 0.14$
（(参考)加法定理:$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$）

$p(A) \times p(B) = 0.4 \times 0.35 = 0.14 = p(A \cap B)$
確率が積で書ける⇒AとBは独立である
$p(A \cap B) = 0.14 \neq 0$なので、AとBは排反ではない
⇒(答)②

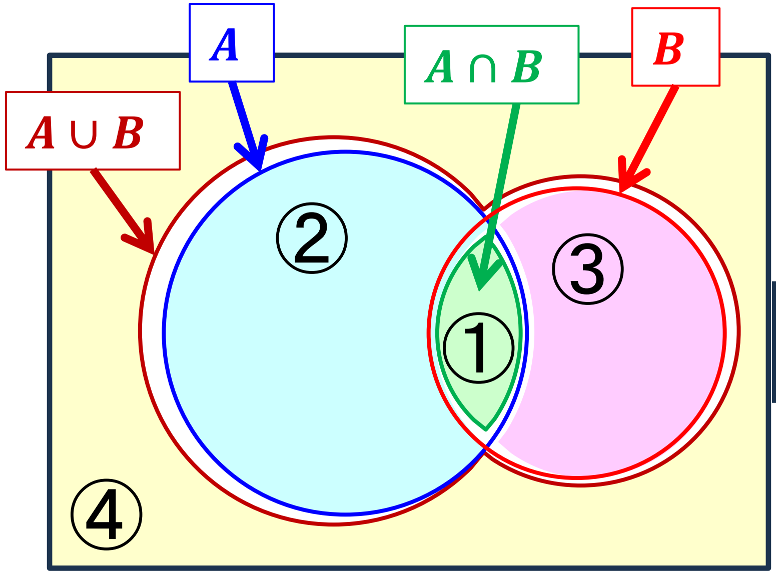
(注)「独立」「排反」⇒補足説明します

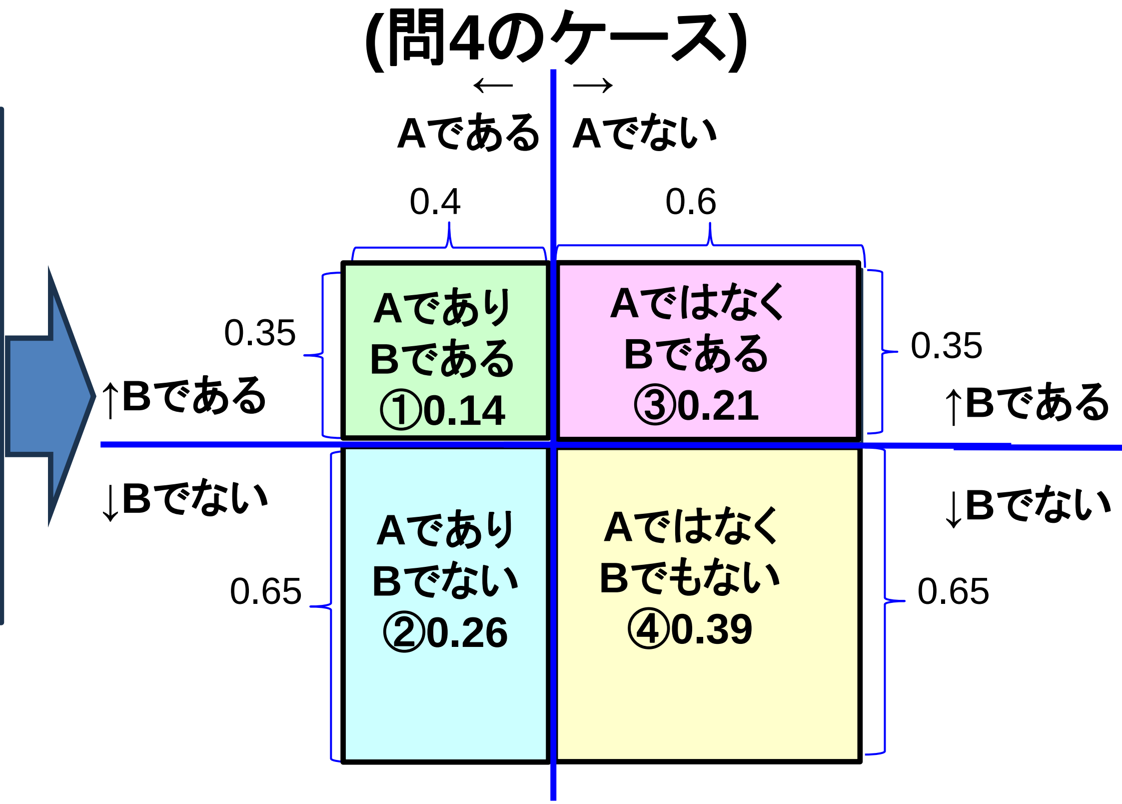


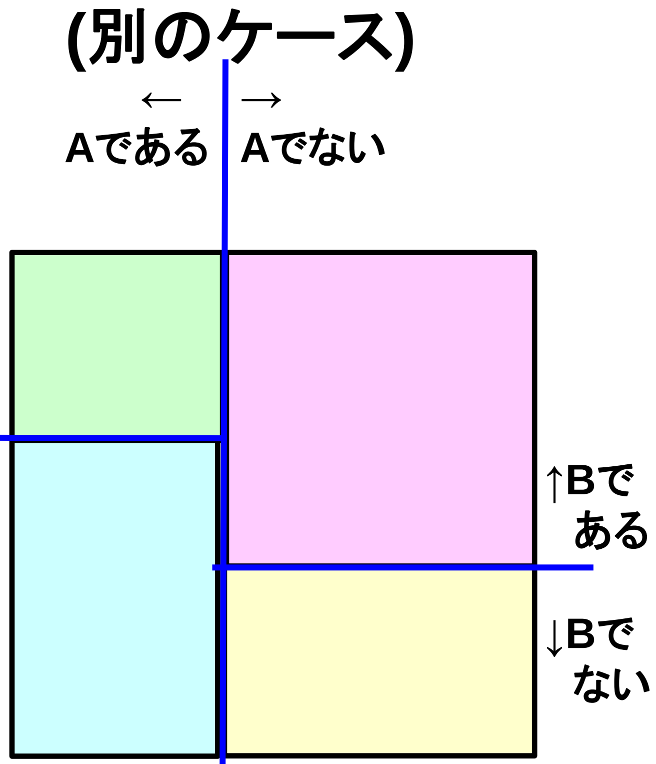


済

(p61.3)[C4]問4. 事象間の排反・独立の補足1







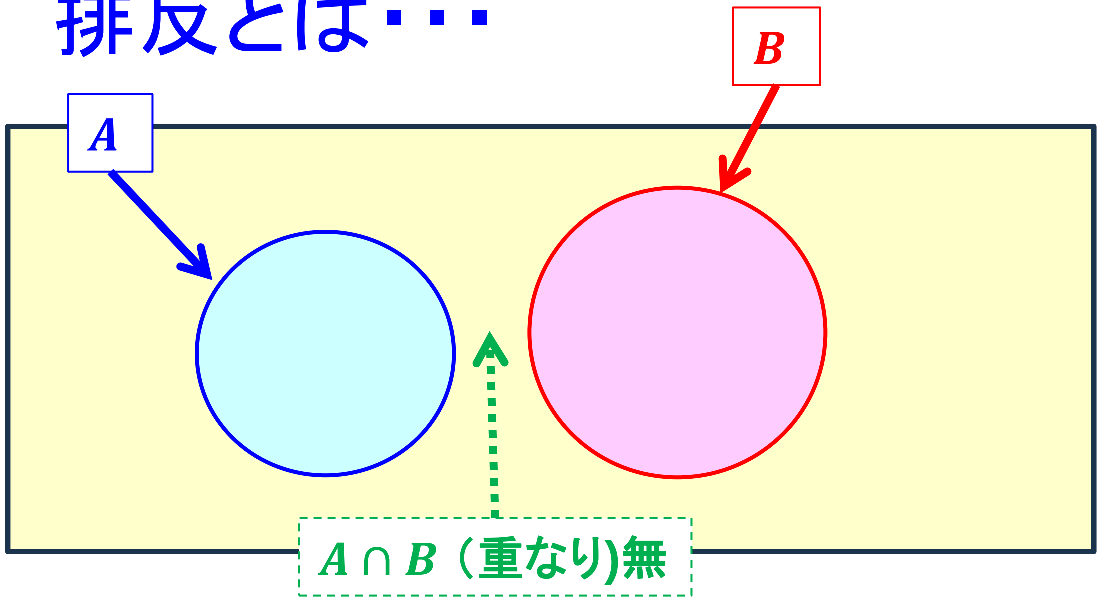
$p(A) = ①+② = 0.4$
$p(B) = ①+③ = 0.35$
$p(A \cup B) = ①+②+③ = 0.61$
$p(A \cap B) = ① = 0.14$
$② = 0.4 - 0.14 = 0.26$
$③ = 0.35 - 0.14 = 0.21$
$④ = 1 - 0.61 = 0.39$

田の字型になる時、
Aである場合も
Aでない場合も
Bである確率は同じ
⇔A,Bは独立

田の字型でない時
Aであるか、
Aでないかにより
Bである確率が変わる
⇔A,Bは独立でない

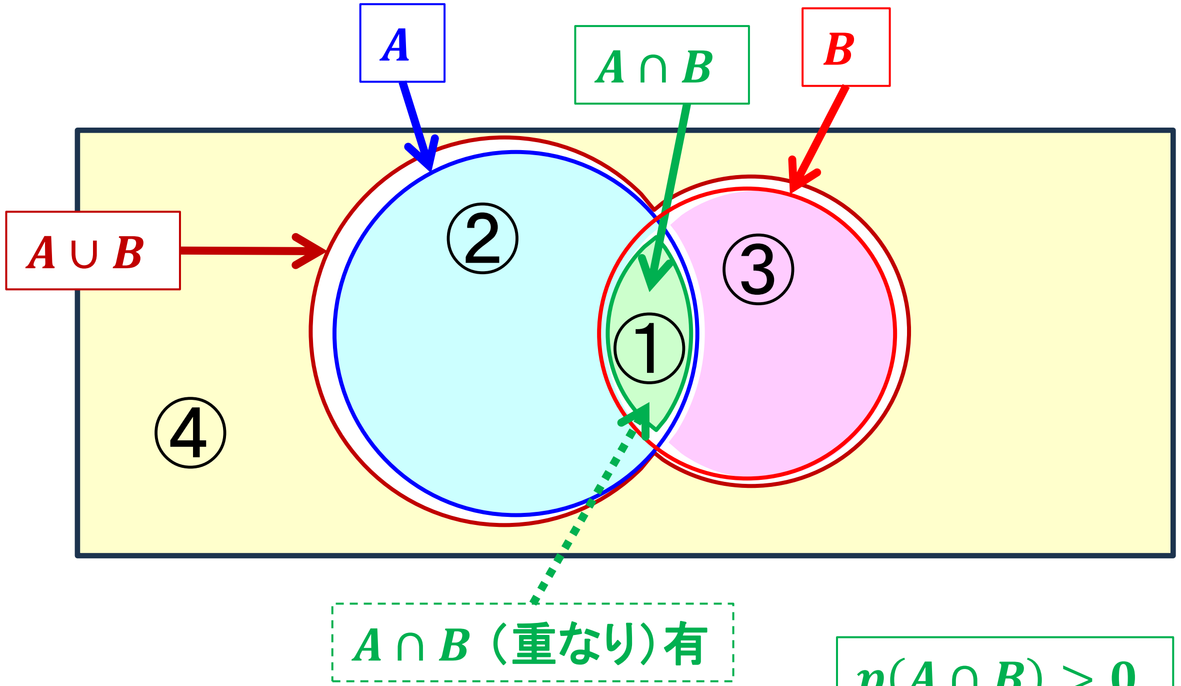
(p61.4)[C4]問4. 事象間の排反・独立の補足2

排反とは・・・



$p(A \cap B) = 0$

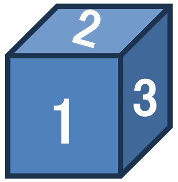
事象Aと事象Bは**排反である**
(同時には起きない)



$p(A \cap B) > 0$

事象Aと事象Bは**排反ではない**
(同時に起きることがある)

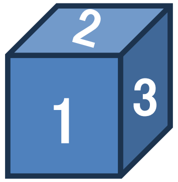
A: xは奇数である
B: xは偶数である



A: xは2の倍数である
B: xは3の倍数である

(p62.1)[C4]問5. 2段階実験確率変数の期待値

(A～Bランク)



サイコロの目は?

1,2: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ → 袋A

3,4,5,6: $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ → 袋B

袋A　取り出す　戻す　を2回

袋B　取り出す　戻す　を2回

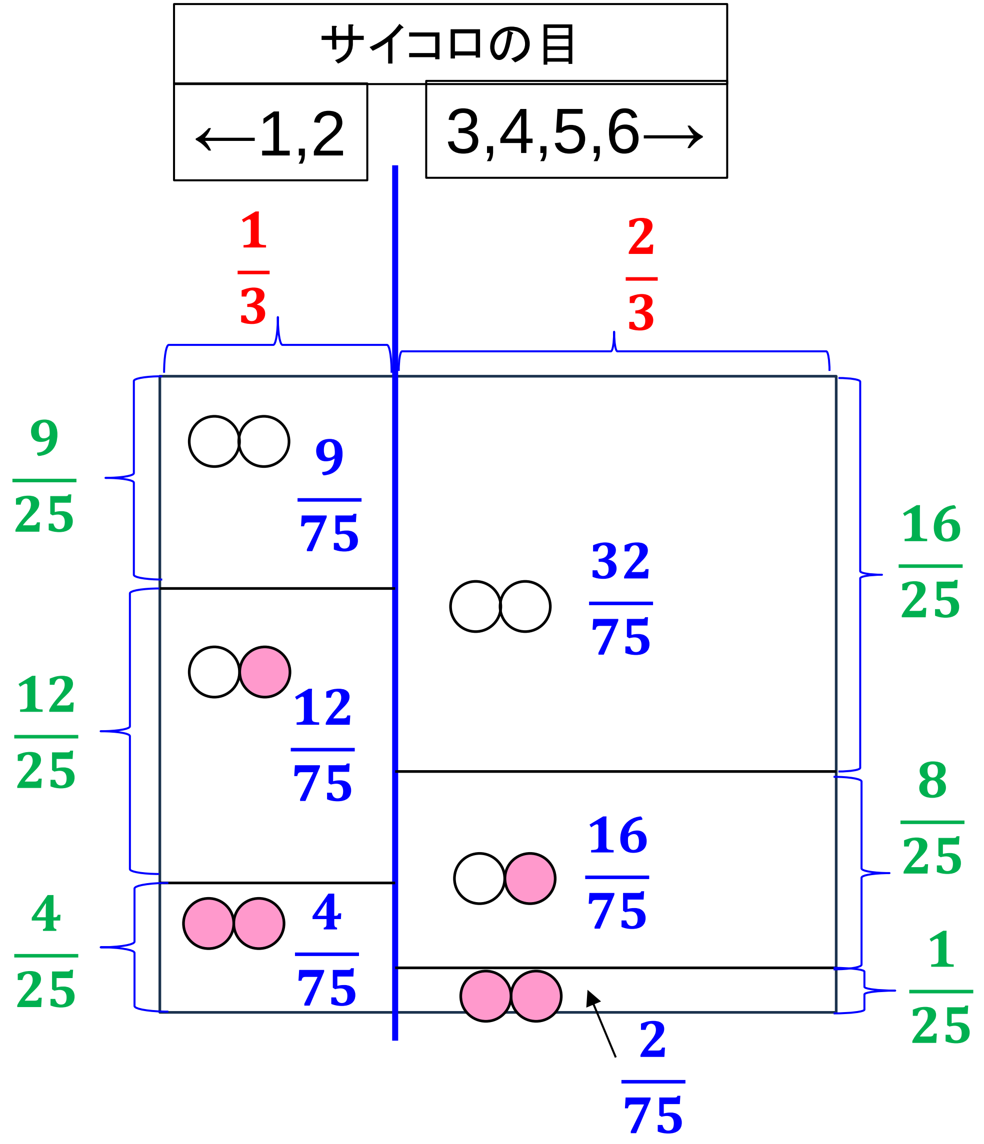
赤玉がでた回数(X):

Q: Xの期待値は？

	袋A 0回	袋A 1回	袋A 2回	袋B 0回	袋B 1回	袋B 2回
	$p = ?$	$p = ?$	$p = ?$	$p = ?$	$p = ?$	$p = ?$
袋からの取り出しの確率	$p = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$	$p = 1 - \frac{9}{25} - \frac{4}{25} = \frac{12}{25}$	$p = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$	$p = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$	$p = 1 - \frac{16}{25} - \frac{1}{25} = \frac{8}{25}$	$p = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$
サイコロ投げも考慮した確率	$\frac{1}{3} \times \frac{9}{25} = \frac{9}{75}$	$\frac{1}{3} \times \frac{12}{25} = \frac{12}{75}$	$\frac{1}{3} \times \frac{4}{25} = \frac{4}{75}$	$\frac{2}{3} \times \frac{16}{25} = \frac{32}{75}$	$\frac{2}{3} \times \frac{8}{25} = \frac{16}{75}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{25} = \frac{2}{75}$

(p62.2)[C4]問5. 2段階実験確率変数の期待値

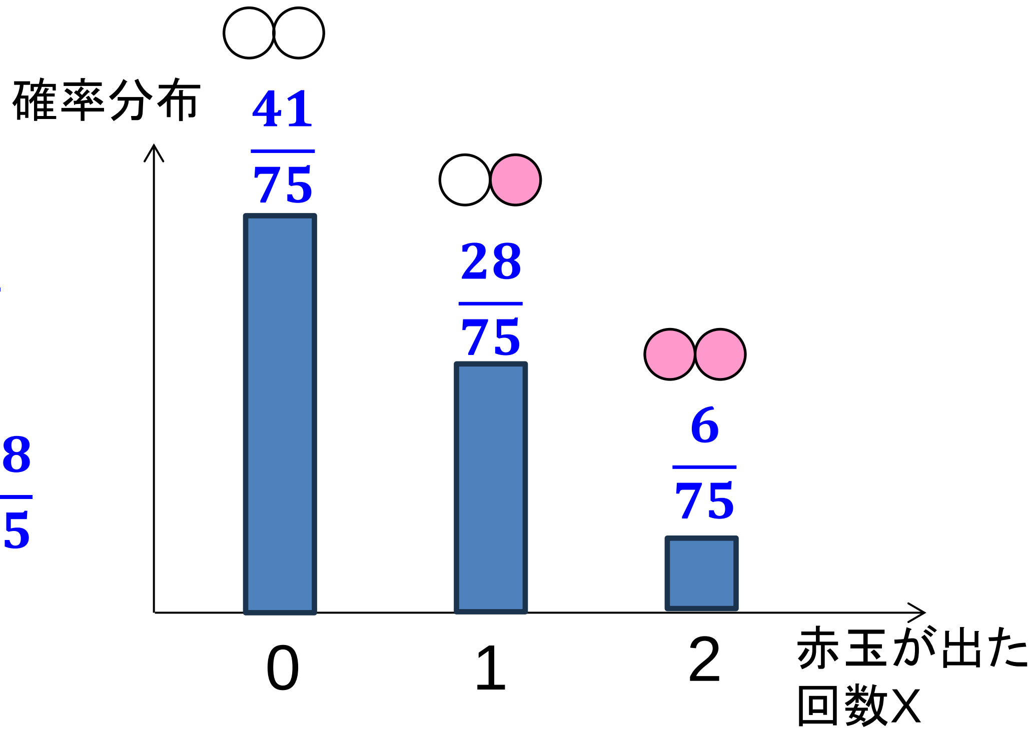
(A～Bランク)



$$\frac{9+32}{75}=\frac{41}{75}$$

$$\frac{12+16}{75}=\frac{28}{75}$$

$$\frac{4+2}{75}=\frac{6}{75}$$

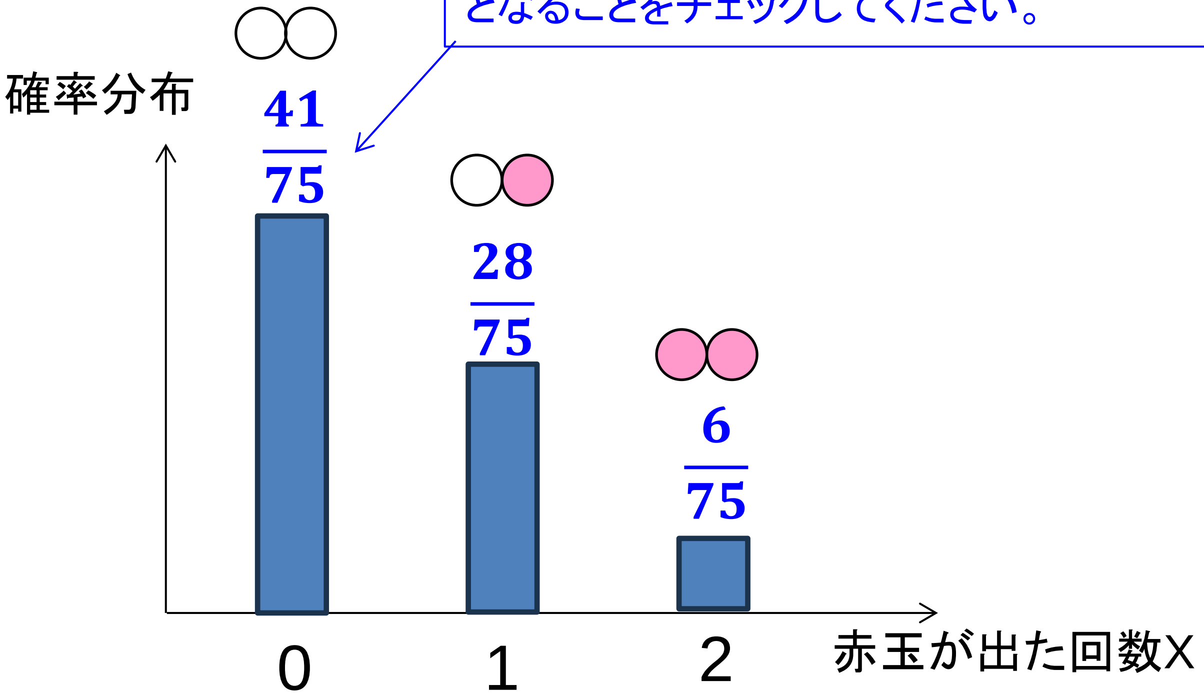


「確率を足したら1」をあちこちで確認してください

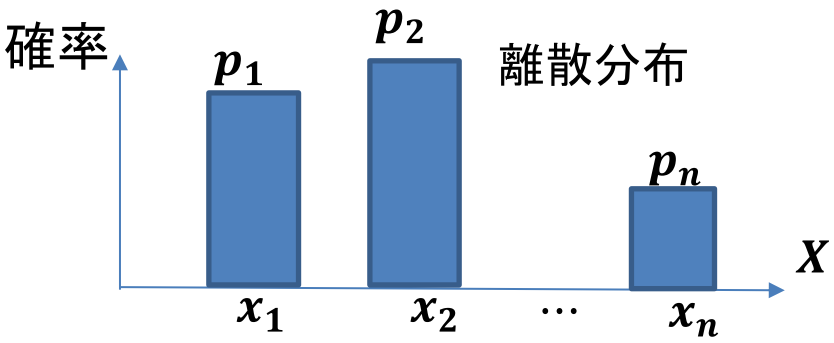
(p62.3)[C4]問5. 2段階実験確率変数の期待値

(A～Bランク)

期待値のみを求める場合、
・時間ない時は、X=0の項の計算は不要です。
どうせ、$0 \times p(X = 0) = 0$になるので。
・時間あるときは、X=0も計算して、確率の和＝1
となることをチェックしてください。



離散型確率分布において、
期待値を求める公式



Xの期待値(*Expectation*)：

$$E(X) = x_1\, p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

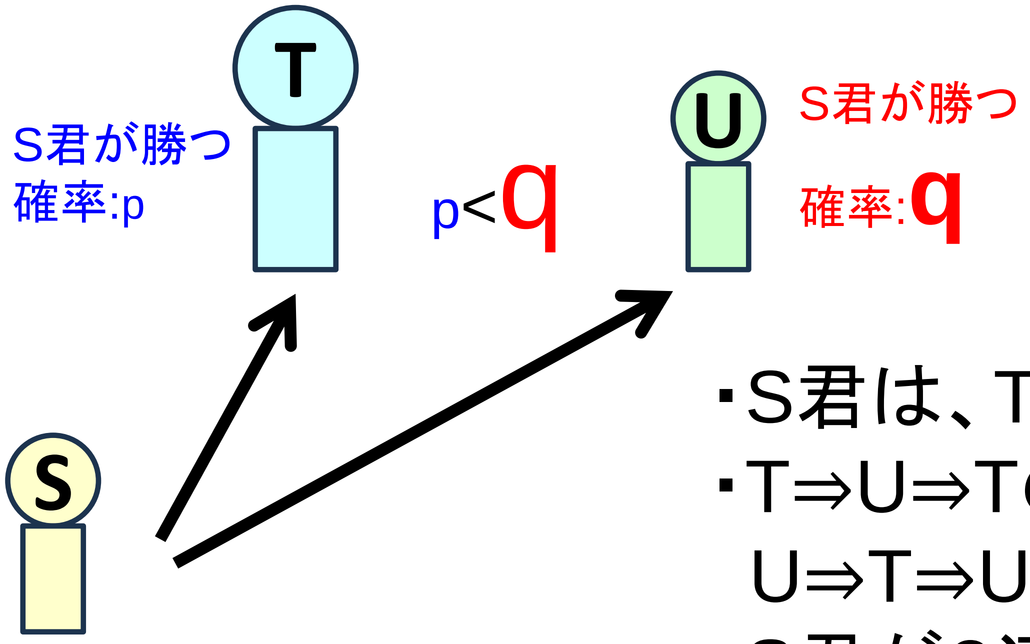
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$$

期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = 0 \times \frac{41}{75} + 1 \times \frac{28}{75} + 2 \times \frac{6}{75} = \frac{40}{75} = \frac{8}{15}$ (答)⑤

済

(p64.1)[C4]問6. 対戦順の説明の正誤

(Bランク)



- S君は、T君、U君と最大3回、腕相撲をする
- T⇒U⇒Tの順か、
  U⇒T⇒Uの順でやる
- S君が2連勝したら、お菓子をもらえる
- S君がT君に勝つ確率：p
- S君がU君に勝つ確率：q　(但し、0<p<q<1)

Q: T⇒U⇒Tの順と U⇒T⇒Uの順はどちらが有利？
⇔お菓子をもらえる確率は、どちらが大きい？

(p64.2)[C4]問6. 対戦順の説明の正誤

(Bランク)

T君と先に対戦　　S君が 勝つ　負ける　　U君と先に対戦

	組合せ	お菓子もらえる？	確率	確率	組合せ	お菓子もらえる？	確率
(1)	T–U	もらえる	$p \times q = pq$	=	U–T	もらえる	$q \times p = pq$
(2)	T–U	もらえない (2連勝できない)			U–T	もらえない (2連勝できない)	
(3)	T–U–T	もらえる	$(1-p) \times q \times p$ $= pq(1-p)$	>	U–T–U	もらえる	$(1-q) \times p \times q$ $= pq(1-q)$
(4)	T–U–T	もらえない			U–T–U	もらえない	
(5)	T–U	もらえない (2連勝できない)			U–T	もらえない (2連勝できない)	
		もらえる確率(計)	$(1)P_T = pq(2-p)$	>		もらえる確率(計)	$(2)P_U = pq(2-q)$

T ： Tに勝つ(確率p)

T ： Tに負ける(確率$1-p$)

U ： Uに勝つ(確率q)

U ： Uに負ける(確率$1-q$)

$0 < p < q < 1 \quad \Rightarrow \quad q - p > 0$

$(1)P_T - (2)P_U = pq(2-p) - pq(2-q) = pq(q-p) > 0$

$\Rightarrow \quad (1)P_T > (2)P_U$ ：T君と先に対戦した方が有利

$(1)P_T$のp, qを入れ替えるだけでよい

(p64.3)[C4]問6. 対戦順の説明の正誤

(Bランク)

T君と先に対戦

組合せ	もらえる？	確率
T–U	もらえる	$p \times q = pq$
T–U–T	もらえる	$(1-p) \times q \times p = pq(1-p)$
もらえる確率(計)		$(1)P_T = pq(2-p)$

確率

=

>

>

U君と先に対戦

組合せ	もらえる？	確率
U–T	もらえる	$q \times p = pq$
U–T–U	もらえる	$(1-q) \times p \times q = pq(1-q)$
もらえる確率(計)		$(2)P_U = pq(2-q)$

T ： Tに勝つ(確率p)

T ： Tに負ける(確率$1-p$)

U ： Uに勝つ(確率q)

U ： Uに負ける(確率$1-q$)

面白い点：（3回中、より弱いU君と2回対戦するより）
より強いT君と2回対戦した方が有利であること。

0 < p < q < 1 ⇒ q − p > 0

$(1)P_T-(2)P_U=pq(2-p)-pq(2-q)=pq(q-p)>0$

⇒ $(1)P_T > (2)P_U$ ：T君と先に対戦した方が有利

前ページとほぼ同じ内容
(緑の字部分のみ追加)

S君の考え: 「U君と先に対戦」が有利

①「T君と先に対戦」が有利、 ②「U君と先に対戦」が有利、
③有利かどうかはp, qに依存、 ④「T君と先」「U君と先」は確率同じ
⑤お菓子獲得の確率：「T君と先」「U君と先」や対戦回数に依存しない⇒どんな対戦でも可

済

⇒(答)①